RELATIVIDAD Y ELECTROMAGNETISMO.

Autor: DIEGO SÁEZ SCHWEDT.
Fecha: 2019…2026.

DISCLAIMER:
Este documento corresponde a una versión preliminar de trabajo académico.
No se sometió a ningún proceso de revisión por pares ("peer review") ni a proceso editorial formal.
Puede contener errores, omisiones, secciones incompletas y desarrollos provisionales.
Se publica como archivo de preservación intelectual y registro de trabajo, no como versión final certificada.
Es la segunda parte de una serie de 3 archivos (Relativ1, Relativ2 y Relativ3).

Primera Parte (Previa)

1. **SISTEMAS DE REFERENCIA**
2. **LEYES FÍSICAS**
3. **RELATIVIDAD ESPECIAL, INTRODUCCIÓN**
4. **TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ**
5. **MECÁNICA RELATIVISTA Y ELECTROMAGNETISMO**

SEGUNDA PARTE.

6. **RELATIVIDAD GENERAL, INTRODUCCIÓN**
   - 6.1 Principio de equivalencia
     - 6.1.1 Gravedad creada por masas móviles
     - 6.1.2 Equivalencia gravedad-aceleración
     - 6.1.3 Masa inercial y masa gravitatoria
   - 6.2 Curvatura de la luz por gravedad
     - 6.2.1 Análisis por potenciales retardados
     - 6.2.2 Análisis por haz de fotones
   - 6.3 Efecto Doppler gravitatorio
     - 6.3.1 Análisis cuántico en base a fotones
     - 6.3.2 Análisis por potenciales retardados
     - 6.3.3 Análisis cinemático clásico
   - 6.4 Sistema con aceleración uniforme
     - 6.4.1 Aceleración propia constante
     - 6.4.2 Fuerza constante
     - 6.4.3 Longitud propia
     - 6.4.4 Tiempo propio
     - 6.4.5 Atrapados en la zona oscura
   - 6.5 Coordenadas de Rindler
     - 6.5.1 Lagrangeano de Rindler
     - 6.5.2 Maximización del tiempo propio 'τ'.
     - 6.5.3 Cuadri-aceleración
     - 6.5.4 Lagrangeano y principios variacionales
   - 6.6 Estudio métrico de la gravedad
     - 6.6.1 Curvatura de luz: análisis por índice de refracción
     - 6.6.2 Análisis Doppler por métrica
     - 6.6.3 Dilatación temporal
     - 6.6.4 Estación espacial rotatoria
     - 6.6.5 Propuesta métrica
   - 6.7 Gravedad planetaria

6.7.1 Perihelio de órbitas planetarias
6.7.2 Posición aparente de estrellas remotas
6.7.3 Velocidad de escape en un campo gravitatorio
6.7.4 Agujeros negros
6.7.5 Horizonte de sucesos y cono de luz
6.8 ¿Principio de Equivalencia?
6.8.1 Caída libre colectiva
6.8.2 Caída libre Rindler
6.8.3 Fuerzas de marea
7. CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO
7.1 Gravito-electromagnetismo
7.1.1 Enfoque cualitativo
7.1.2 Enfoque cuantitativo por campos
7.1.3 Enfoque cuantitativo por métrica
7.1.4 Limitaciones
7.2 Perturbación métrica espacial
7.2.1 Perturbación por cambio de variable
7.2.2 Análisis de fuerzas
7.2.3 Métrica de Schwarzschild
7.2.4 Coordenadas de Gullstrand-Painlevé
7.2.5 Más allá del horizonte
7.3 Métrica y curvatura
7.3.1 Modelo bidimensional
7.3.2 Métrica variable en el tiempo
7.3.3 Principio de equivalencia “inverso”
7.3.4 Curvas geodésicas
7.3.5 Espaciotiempo *curvo* en Relatividad
7.3.6 Paraboloide de Flamm
7.4 Modelo mecánico de la gravedad
7.4.1 Fuerza gravitatoria sobre una masa ‘m’
7.4.2 Modelo de “colchón” de resortes
7.4.3 Propagación de perturbaciones
7.4.4 Métrica en el colchón
7.4.5 Curvatura de la luz
7.4.6 Generación de perturbaciones mediante masas ‘M’
7.4.7 Lecturas adicionales
8. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
8.1 Sistemas de coordenadas
8.1.1 Coordenadas oblicuas
8.1.2 Métrica
8.1.3 Base dual de vectores
8.1.4 Tensor métrico dual
8.1.5 Subir y bajar índices
8.1.6 Coordenadas esféricas
8.1.7 Coordenadas esferoidales
8.1.8 Coordenadas hiperesféricas 4D
8.2 Derivada covariante
8.2.1 Divergencia en coordenadas cilíndricas
8.2.2 Divergencia en coordenadas curvilíneas
8.2.3 Curvas sobre superficies
8.2.4 Ecuación de fuerzas

8.2.5 Fuerzas gravitatorias
8.2.6 Ecuación geodésica
8.3 Símbolos de Christoffel
8.3.1 Método de las geodésicas
8.3.2 Método de los vectores base
8.3.3 Divergencia en coordenadas esféricas
8.4 Análisis tensorial
8.4.1 Tensor de momento de inercia
8.4.2 Tensor de momento cuadrupolar
8.4.3 Tensor de tensiones en un material
8.4.4 Componentes de un tensor
8.4.5 Gradiente de un vector
8.4.6 Derivada covariante de un tensor
8.4.7 Tensores de rango >2
8.5 Geometrías no euclideanas
8.5.1 Suma de ángulos de un triángulo
8.5.2 Longitud de una circunferencia
8.5.3 Deriva geodésica geométrica
8.5.4 Deriva geodésica gravitatoria
8.5.5 Transporte paralelo
9. FÍSICA EN ESPACIOS CURVOS
9.1 Tensores de curvatura
9.1.1 Paraboloide elíptico
9.1.2 Transporte paralelo en el vértice
9.1.3 Tensor de Riemann
9.1.4 Riemann y transporte paralelo
9.1.5 Tensor de Ricci
9.1.6 Escalar de Ricci
9.2 Aplicaciones de geometría diferencial
9.2.1 Divergencia genérica
9.2.2 Tensor de Riemann y deriva geodésica
9.2.3 Tensor de Ricci y variación de volumen
9.2.4 Tensor de Ricci y materia
9.2.5 Curvatura de una cáscara esférica
9.3 Electromagnetismo en espacios curvos
9.3.1 Electromagnetismo en coordenadas cilíndricas
9.3.2 Espaciotiempo acelerado
9.3.3 Fuerza de Lorentz
9.3.4 Tensor de campo contravariante
9.3.5 Ecuaciones de Maxwell
9.3.6 Ecuación de ondas electromagnéticas
9.4 Principio de mínimo acople
9.4.1 Fuerza y aceleración
9.4.2 Derivada covariante del tensor métrico
9.4.3 Identidad de Bianchi
9.4.4 Simetrías del tensor de Riemann
9.5 Laplaciano relativista
9.5.1 Métrica de Rindler
9.5.2 Rindler linealizado
9.5.3 Schwarzschild
9.5.4 Gullstrand-Painlevé

9.6 Principio de covarianza
- 9.6.1 Límite del campo débil
- 9.6.2 Símbolos de Christoffel
- 9.6.3 Tensor de Riemann
- 9.6.4 Tensor de Ricci
- 9.6.5 Condición de calibre
- 9.6.6 Posible métrica de vacío

6. RELATIVIDAD GENERAL, INTRODUCCIÓN.

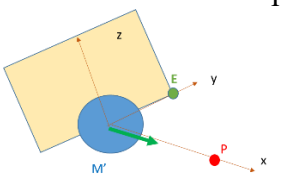
Las ecuaciones que venimos presentando hasta el momento forman lo que se conoce con el nombre de Relatividad Especial o Relatividad Restringida. Podríamos preguntarnos ¿cuál es la restricción de esta teoría? O, si es que aplica solo a escenarios particulares o especiales, ¿cuáles serían entonces los escenarios generales que todavía no estamos contemplando?
El concepto habitualmente aceptado es que la Relatividad Especial describe en forma satisfactoria la Física *en sistemas de referencia inerciales lejos de fuentes gravitatorias*.
Estudiaremos a partir de este capítulo cuáles son las *rupturas* que se empiezan a manifestar cuando nos alejamos de estos escenarios especiales o restringidos. Cuando nos enfrentemos a una gravedad o a una aceleración nos encontraremos con fenómenos que tienen un sostén muy débil o nulo con otras áreas de la Física anteriores a la Relatividad General.
Otro aspecto que veremos en estos nuevos capítulos es cómo las leyes físicas se pueden *generalizar* a cualquier sistema de coordenadas, no solo cartesianas. Y cómo mantienen su forma frente a cualquier cambio de referencia, no solo transformaciones de Lorentz.

6.1 Principio de Equivalencia.

Tenemos dos nuevos temas para abordar: gravedad y aceleración. ¿Por cuál empezamos?
Mostraremos brevemente, en 1 página o 2, el tipo de dificultades que enfrentaríamos si comenzáramos por la gravedad. Cambiaremos inmediatamente el enfoque: analizaremos la aceleración, y en virtud del llamado "Principio de Equivalencia" iremos gradualmente transportando hacia el mundo de la gravitación todos los resultados que vayamos aprendiendo con la aceleración.

6.1.1 Gravedad creada por masas móviles:

La Ley Gravitatoria de Newton insinúa una propagación instantánea de la acción causa-efecto, y ya vimos en 4.4.3 que todo lo que viaje más rápido que la luz puede crear conflicto de causalidad. Para masas estáticas, que están donde estuvieron siempre desde el origen de los tiempos, no habría problema inmediato; porque se asume que la información sobre su gravedad ya tuvo tiempo para propagarse hacia todo el Universo y sus alrededores. Pero es de esperar que algunas de las incompatibilidades queden manifiestas para una masa móvil 'M' que se mueve a velocidad $v_o \vec{} = v_o \hat{x}$ y factor $1/\gamma^2 = 1-v_o^2/c^2$.
Llamamos "eje polar" al eje $x\vec{}$ alineado con la trayectoria de la masa 'M', correspondiente a las coordenadas y=0 z=0, y llamamos "plano ecuatorial" al plano $x=v_o t$. Para medir los efectos gravitatorios colocamos masas de prueba 'm' en los alrededores de 'M', una en el punto 'P' y otra en el punto 'E'.



Caso-E) $\theta=\pi/2$, 'm' se ubica en el plano ecuatorial del flujo másico, punto 'E' verde.
En el referencial Σ' que acompaña a 'M', suponemos que la Ley de Newton es válida y escribimos la fuerza conocida que esperamos que experimente la masa verde.

$f_y' = -M.m.G/r'^2$ →sustituimos $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$
$f_y' = -M.m.G/(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ →aplicamos Lorentz $x'=\gamma.(x-v_o t)$, $y'=y$, $z'=z$
$f_y' = -M.m.G/[\gamma^2(x-v_o t)^2 + y^2 + z^2]$ →ubicamos $x=v_o t$, $z=0$, $y=r$ (distancia en Σ)
$f_y' = -M.m.G/r^2$

Al pasar al referencial Σ, debemos prestar atención a que las fuerzas clásicas (minúsculas f_y) aparecen modificadas por los factores cinemáticos γ_u al construir el cuadrivector relativista (mayúsculas F^0 F^x F^y F^z).
La transformación de Lorentz transversal al movimiento dice:

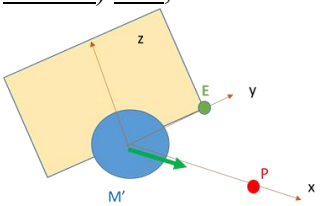
$F^y = F'^y$ →hacemos aparecer las γ_u de la partícula
$\gamma_u.f_y = \gamma'_u.f_y'$ → $\gamma_u=1$ ('m' se ve quieta en Σ), $\gamma'_u=\gamma$ ('m' se ve móvil en Σ')

$f_y = \gamma.f_y'$ → sustituimos en la expresión de la fuerza

$f_y = -(\gamma M).m.G/r^2$ ¿usamos m o γ.m?

γ.M podría interpretarse como una masa efectiva incrementada por efecto de su energía cinética, que la haría producir mayor gravedad que cuando está en reposo. Pero entonces la masa 'm' también tendría que variar su sensibilidad al campo gravitatorio en función de su estado de movimiento. La 'm' de la fórmula es la medida en Σ', donde 'm' se ve móvil. Faltaría un segundo factor gamma, y eso crearía una incompatibilidad: *La regla de transformación de las fuerzas newtonianas no es la de un buen cuadrivector relativista*.

Caso-P) θ=0, 'm' se ubica en el eje polar del flujo másico, punto 'P' rojo.



$f_x' = -M.m.G/r'^2$ →sustituimos $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

$f_x' = -M.m.G/(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ →aplicamos Lorentz $x'=\gamma.(x-v_o t)$, $y'=y$, $z'=z$

$f_x' = -M.m.G/[\gamma^2(x-v_o t)^2 + y^2 + z^2]$ →ubicamos $y=0, z=0, x-v_o t=r$ (distancia en Σ)

$f_x' = -M.m.G/(\gamma^2 r^2)$

La transformación de la cuadrifuerza, en la dirección del movimiento, dice:

$F^{x'} = \gamma(F^x - v_o/c.F^0)$ →F^0=potencia=nula porque la carga está quieta en Σ

$F^{x'} = \gamma F^x$ →hacemos aparecer las γ_u de la partícula

$\gamma'_u.f_x' = \gamma\ \gamma_u.f_x$ → $\gamma_u=1$ ('m' se ve quieta en Σ), $\gamma'_u = \gamma$(móvil en Σ')

$\gamma.f_x' = \gamma.f_x$

$f_x' = f_x$ → sustituimos en la expresión de la fuerza

$f_x = -M.m.G/(\gamma^2 r^2)$

Ahora la transformación de Lorentz nos predice una fuerza *debilitada respecto a la fórmula de Newton* por un factor γ^2. La sustitución de la masa relativista "γm" en lugar de 'm' solo nos permite rescatar un factor γ, pero no resuelve la incompatibilidad. Son errores de segundo orden, poco relevantes para las velocidades de escala humana y planetaria. Pero nos sirven de motivación para explorar un enfoque alternativo basado en la equivalencia gravedad-aceleración, en la Mecánica Lagrangeana y en los conceptos métricos.

6.1.2 Equivalencia gravedad-aceleración:

La gravedad y la aceleración son dos fenómenos con aspectos en común, y de acuerdo con ciertos experimentos mentales podrían considerarse equivalentes o intercambiables.

Caso-1)

En las cercanías de la Tierra estamos sometidos a un campo gravitatorio de intensidad $g \approx 9.81\ m/s^2$.

Esa gravedad se manifiesta de dos maneras:

- Si nos soltamos y nos lanzamos en *caída libre* adquirimos una aceleración 'g' (ignorando de momento la fricción del aire).
- Para no caer necesitamos una plataforma o *piso* que nos sostenga, y eso ejerce una fuerza sobre nuestros pies (fuerza que sentimos) o sobre los objetos que apoyemos.

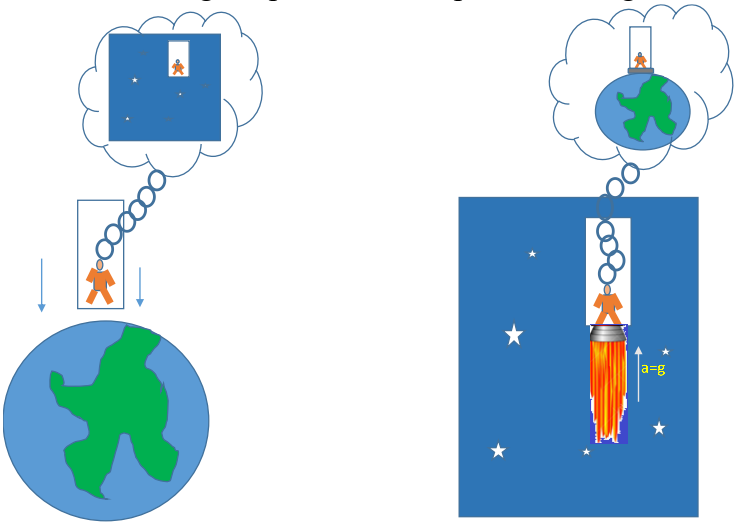
Observación: *Si hay aire en la región del experimento, las moléculas ejercerán una fuerza que se opone a que el objeto en caída adquiera la aceleración 'g'. Entonces ya no será "caída libre". Dado que realizamos* ***experimentos mentales****, perfectamente podemos suponer en nuestra mente que no hay aire.*

Caso-2)
El escenario es bien diferente en el espacio exterior. Si nos vamos en una nave espacial lejos de la Tierra y de cualquier otro planeta o estrella que pueda atraernos en forma significativa, lo que observamos es:

- El *piso* de la nave no hace fuerza sobre nuestros pies; de hecho no tiene sentido hablar de piso ni de techo en este escenario.
- Si nos dejamos caer no caemos a ningún lado, mantenemos el estado de flotación. Si dejamos libre un objeto, se queda flotando; si le damos un pequeño impulso, sigue un trayecto rectilíneo.

Los experimentos mentales del Principio de Equivalencia funcionan de la siguiente manera:

- Si en la Tierra (escenario-1, izquierda) nos ubicamos en un ascensor y dejamos que este inicie una caída libre, todos (personas y objetos) caemos por igual en el referencial de la Tierra. Pero dentro de nuestra caja parece que flotáramos ingrávidos → experimentamos lo mismo que si estuviéramos en el espacio (escenario-2).
- Por otro lado, si los motores de nuestra nave del caso-2 comienzan a acelerar con a=9.81 m/s^2, (derecha)→ sentimos igual que si estuviéramos en el caso-1, apoyados sobre la superficie terrestre o sobre alguna plataforma en presencia de gravedad.



6.1.3 Masa inercial vs. masa gravitatoria:

En textos de Física es usual asociar el Principio de Equivalencia con la coincidencia entre *masa inercial* y *masa gravitatoria*. Se trata de dos magnitudes conceptualmente diferentes que en principio no tendrían porqué tener el mismo valor numérico; esta coincidencia de valores forma parte de las hipótesis fundamentales de la Física actual que fue verificada experimentalmente con la máxima precisión disponible hasta el momento.

- Masa gravitatoria es la sensibilidad al campo gravitatorio; es el factor de proporcionalidad entre la fuerza gravitatoria y el gradiente de potencial gravitatorio. → Es decir: $\vec{F_g} = -m_g \cdot \nabla\Phi_g$
- Masa inercial cuantifica la manera en que un cuerpo se resiste a variar su velocidad; es el factor de proporcionalidad entre aceleración y fuerza total (puede haber otras contribuciones además de la fuerza gravitatoria). → Es decir, $\vec{F} = m_i \cdot \vec{a}$.

El hecho de que se verifique $m_g=m_i$ permite asegurar que en presencia únicamente de fuerzas gravitatorias (lo que se llama *caída libre*), todos los cuerpos cualquiera sea su masa adquieren la misma aceleración llamada "aceleración de la gravedad". ~~m_i~~.$\vec{a}$ = ~~m_g~~.$\vec{g}$ → $\vec{a}=\vec{g}$

El campo $\vec{g}$ es una propiedad local del espacio, no del objeto estudiado.
Este concepto es la semilla de los modelos gravitatorios geométricos basados en curvatura, como veremos a partir del capítulo 7. Es fácil de visualizar en una superficie inclinada dentro del espacio terrestre, por ejemplo en una montaña rusa. Para el espacio interplanetario alrededor del Sol requiere un mayor esfuerzo de abstracción. ¿Porqué la aceleración hacia el Sol depende del lugar pero no de la masa del planeta?

De cualquier manera, independientemente de cómo se visualice, la idea encerrada en este Principio de Equivalencia es que todos los cuerpos aceleran por igual.
Es exactamente lo que ocurre en un referencial acelerado Σ', donde sus objetos o habitantes verifican:

$\vec{a} = \vec{a_o} + \vec{a'}$ $\quad$ $\vec{a}$=aceleración total, suma de dos contribuciones
$\quad$ $\vec{a'}$=aceleración relativa, $\vec{a_o}$=aceleración de arrastre
$\mathbf{0} = \vec{a_o} + \vec{a'}$ $\quad$ →en caída libre $\vec{a} = \mathbf{0}$
$\vec{a'} = -\vec{a_o}$

El negativo de la aceleración de arrastre $-\vec{a_o}$ cumple el rol de $\vec{g}$, aceleración relativa de caída libre que es impuesta a todos los objetos cualquiera sea su masa.
O, dicho de otra manera, todos los objetos experimentan en Σ' un campo de *fuerzas ficticias* $-m.\vec{a_o}$ proporcional a su masa 'm', igual que en la Ley de Newton de Gravedad.
En este escenario no hay distinción entre el campo gravitatorio creado por un astro masivo y la gravedad artificial creada por un sistema acelerado. Las leyes físicas deberían tener la misma forma en ambos casos, lo cual nos permitirá hacer estudios interesantes.

Historia:
El camino que estamos recorriendo se corresponde con los avances históricos del conocimiento:

- Galileo Galilei: Las leyes de la Mecánica deben mantener la misma forma al cambiar de referencia dentro de sistemas inerciales Σ y Σ'.
- Relatividad Especial: Se extiende lo anterior a las leyes de toda la Física, no solo la Mecánica.
- Relatividad General: Se incluyen también sistemas no inerciales.

El Principio de Equivalencia significa el comienzo de esta nueva etapa: si con la aceleración *sentimos* lo mismo que en la gravedad, también otras leyes físicas deberán coincidir. La equivalencia actúa a nivel de nuestros sentidos humanos y también a nivel de nuestros instrumentos de medición.

Para adquirir confianza en el Principio de Equivalencia, comenzaremos analizando desde un enfoque semi-clásico dos situaciones: la curvatura de la luz y el efecto Doppler.
En ambos casos veremos que los resultados parecen bastante verosímiles, sin necesidad de grandes hipótesis o postulados teóricos. Lo único que se requiere aceptar es la *dualidad onda-partícula* para describir la naturaleza y el comportamiento de la luz.
En las primeras etapas del estudio no haremos mucho esfuerzo en la precisión matemática; en general nos vamos a conformar con aproximaciones razonablemente válidas para longitudes reducidas, bajas velocidades y campos gravitatorios débiles. Luego iremos incorporando progresivamente los elementos de Relatividad Especial adquiridos en los capítulos 1 al 5 de este trabajo.

6.2 Curvatura de la luz por gravedad.

Ejercicio guiado: En una zona libre de gravedad circula una onda electromagnética con trayectoria parametrizada como x(t)=0, y(t)=c.t, z(t)=0 en su frente de onda. Por esa región atraviesa una nave acelerada con aceleración $\vec{a} = a_o.\hat{z}$.

Mediante un simple cambio de variable *clásico* (sin transformación de Lorentz):

t=t' x=x' y=y' $z=z' + \frac{1}{2}.a_o.t'^2$

podemos demostrar que el frente de ondas se ve curvado en el referencial Σ' de la nave acelerada.

La trayectoria del rayo de luz es:

x=0 y=c.t z=0

Pasamos al otro referencial Σ':

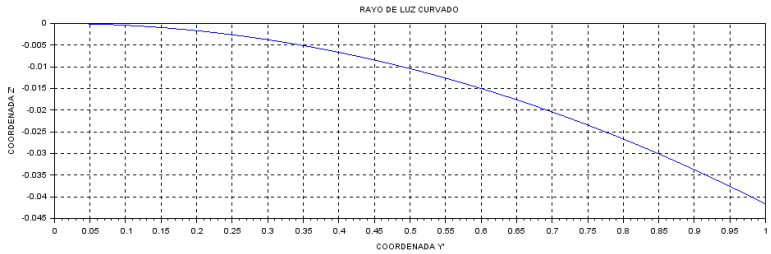
$z = 0$

$z' + \frac{1}{2}.a_o.t'^2 = 0$

$z' = -\frac{1}{2}.a_o.t'^2$ →sustituimos t'=t, t=y/c, y=y' → t'=y'/c

$z' = -\frac{1}{2}.a_o.y'^2/c^2$

En los ejes y',z' del referencial Σ' el rayo de luz describe un arco de parábola.

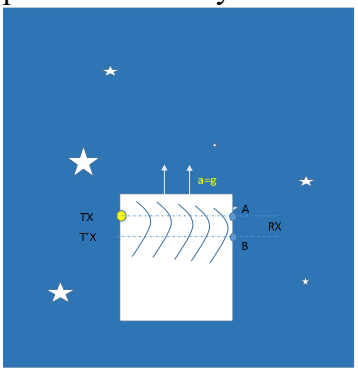


Curiosidad: la Teoría de la Relatividad no es imprescindible para descubrir esta *rareza*, pero sí es necesaria para entenderla mejor y ubicarla en un contexto más amplio.

6.2.1 Análisis por potenciales retardados:

Consideramos una nave espacial con aceleración uniforme a_o en el espacio exterior. Para desprendernos del problema de la velocidad, nos situamos en un referencial Σ' inercial que se mueve momentáneamente solidario a la nave. La aceleración se va a seguir observando, pero al menos se parte del reposo y eso ayuda a simplificar los cálculos.

Desde el extremo izquierdo de la figura un transmisor TX emite ondas electromagnéticas que son recibidas en el extremo derecho por un receptor RX. Se asume una razonable directividad o ganancia en una dirección dominante; no contemplamos radiadores omni-direccionales porque en ese caso el concepto de "rayo" perdería sentido y el análisis se complicaría.



El punto alto 'A' ubicado a igual altura que TX *no es el punto de recepción óptima*; la teoría de los potenciales retardados indica que las contribuciones que llegan a RX son las que provienen de la posición retardada de la fuente, ubicada en T'X según el dibujo (levemente por debajo de TX): es donde estaba ubicado el transmisor cuando lanzó la onda que ahora está llegando al receptor.

La recepción con nivel máximo se da en el punto bajo 'B' enfrentado a T'X.

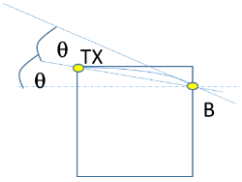
Distancia horizontal = y

Tiempo de retardo o propagación $t_{ret} \approx y/c$

Apartamiento vertical	$z \approx \frac{1}{2}\, a_o .\, t_{ret}^2 \approx \frac{1}{2} a_o . y^2/c^2$
Inclinación de arranque del rayo	0
Inclinación de llegada del rayo	2θ
Ángulo medio de inclinación	$\theta \approx z/y = \frac{1}{2}.\, a_o . y/c^2$
Curvatura	K_{urv} = giro/distancia $\approx 2\theta / y = a_o/c^2$

La curvatura se define como variación angular (en radianes) por unidad de distancia recorrida.

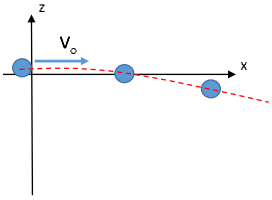
Curvatura=$K_{urv} \approx a_o/c^2$ **Radio de curvatura=$R_{curv} \approx c^2/a_o$**



La figura auxiliar muestra la diferencia entre θ (el ángulo medio de la cuerda TX--B) y la inclinación del rayo en el punto de llegada B (~2θ). A cada distancia horizontal 'y' a la que ubiquemos el receptor le corresponde una altura $|z| = \frac{1}{2}.\, a_o . y^2/c^2$, el lugar geométrico de los puntos (y,z) forma el *rayo* de luz.
La gráfica es un arco de parábola, que en pequeñas regiones se aproxima como un arco circular con radio de curvatura grande.

6.2.2 Análisis por haz de fotones:

Imaginamos un *chorro* de bolas de masa '*m*' que son lanzadas horizontalmente desde x=0 z=0 en presencia de gravedad $\vec{g} = -g\,\hat{z}$.



Las ecuaciones de proyectil dan:

$x(t) = v_o.t$	$u_x = dx/dt = v_o$
$z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2$	$u_z = dz/dt = -g.t$

De acuerdo con la definición de curvatura:

$K_{urv} = \theta$ / dist

$tg(\theta) = |u_z/u_x| = g.t/v_o$

$\theta \approx g.t/v_o$ porque nos interesa el inicio de la curva cuando θ es chico y $tg(\theta) \approx \theta$.

dist $\approx v_o.t$

$K_{urv} = \theta$ / dist $\approx (g.t/v_o)/(v_o.t) \approx g/v_o^2$

La masa no aparece en ningún lado de las fórmulas, o sea que esto valdría también para fotones con $v_o = c$.

Lo que lleva al resultado $K_{urv} \approx g/c^2$

Reflexión: Aunque la masa no aparece en las expresiones matemáticas, es necesaria para que la partícula experimente fuerza gravitatoria. Y en Relatividad Especial vimos que a los fotones se les podía asignar una masa efectiva o masa equivalente $m = p/c = E/c^2$ debido a que transportan energía 'E' y cantidad de movimiento 'p', a pesar de tener masa en reposo nula. Esta propiedad similar a la masa, asociada a la inercia, también se manifiesta como sensibilidad al campo gravitatorio.
Salvo este pequeño *empujón* relativista, por ahora estamos visualizando la equivalencia entre gravedad y aceleración mediante argumentos puramente clásicos: una misma ley se cumple en los dos sistemas y se describe con las mismas ecuaciones.
La aceleración de arrastre $\vec{a_o}$ se identifica con el vector gravitatorio $\vec{g}$, a menos de algún ajuste de signo según cómo orientemos los ejes.

6.3 Efecto Doppler gravitatorio.

En presencia de campos gravitatorios, o en la nave que los simula a través de su aceleración, las transmisiones de ondas electromagnéticas entre puntos *bajos* y puntos *altos* llegan a destino con corrimiento de frecuencia. Se lo llama Efecto Doppler gravitacional para distinguirlo del Doppler cinemático de la Relatividad Especial. Este fenómeno lo vamos a abordar desde distintos puntos de vista.

6.3.1 Análisis cuántico en base a fotones:

Según la Física Cuántica, los fotones tienen energía $E=\hbar.\omega$, siendo $\hbar$ la constante de Planck reducida por factor 2π. Si aceptamos que los fotones son afectados por la gravedad, podemos cuantificar cuánta energía deben ceder para poder trepar cierta altura 'Δz' en un campo gravitatorio de intensidad local 'g':

$\Delta E \approx -\Delta U_{pot}$ sustituimos $U_{pot}=m.g.z$, aproximación local

$\Delta E \approx -m.g.\Delta z$ sustituimos $m=E/c^2$ (equivalencia 5.3)

$\Delta E \approx -E.g.\Delta z/c^2$

$\Delta E/E \approx -g.\Delta z/c^2$ sustituimos $E=\hbar\omega$; $\Delta E=\hbar\Delta\omega$

$$\Delta\omega/\omega \approx -g.\Delta z/c^2$$

Advertencia: Consideramos prudente utilizar el signo ≈ en lugar del de igualdad = porque todavía no incluimos de lleno a la Relatividad y nos estamos basando en Física Clásica (o incluso en Físicas ajenas a nuestro trabajo como la Cuántica).
Por otro lado: si los fotones son sensibles a la gravedad, su velocidad coordenada podría afectarse y tendría un valor $u_c \neq c$; no estaría claro si se sigue cumpliendo $E=mc^2$ o si 'c' debe sustituirse por otra 'u_c'.
Observación: El signo (–) se debe a que la frecuencia disminuye al "subir", el signo será (+) si la onda "baja" y aumenta su frecuencia.

6.3.2 Análisis por potenciales retardados:

En la nave de nuestros experimentos nos situamos en un referencial Σ' inercial que la acompaña en forma solidaria, al menos durante el tiempo reducido que dure el análisis. Medimos así los efectos exclusivos de la aceleración sin que nos interfiera la velocidad.

Emitimos una onda electromagnética desde la base y la recibimos en el techo a una altura 'H', con un retardo de propagación $t_{ret} \approx H/c$. Durante ese breve tiempo la actuación de la aceleración produce una diferencia de velocidad de $v=a_o.t_{ret} = a_o.H/c$.
De acuerdo con la teoría de los potenciales retardados, el receptor no *ve* al transmisor quieto. Las contribuciones le llegan desde un instante anterior en que se estaba *alejando* y la frecuencia modificada por efecto Doppler es:

$\omega' = \omega.(1-v/c) = \omega.(1-a_o.H/c^2)$

$\Delta\omega = \omega'-\omega$

$\Delta\omega = -\omega.a_o.H/c^2$ $\quad \rightarrow \Delta\omega/\omega = -a_o.H/c^2$

6.3.3 Análisis cinemático clásico:

Graficamos:

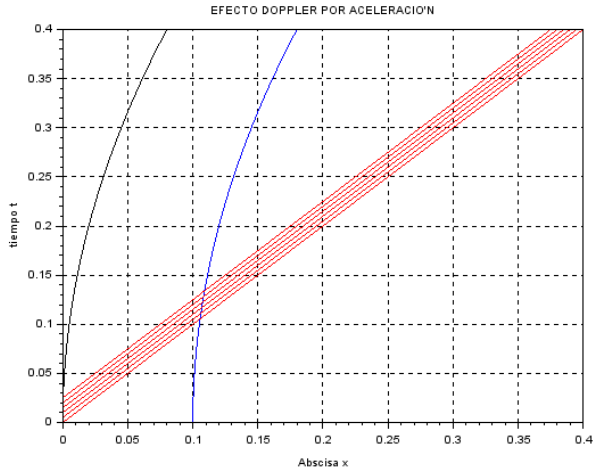
- En trazo negro la trayectoria del piso de la nave, desde donde se emite una ráfaga de ondas electromagnéticas o rayos de luz
- En trazo azul la trayectoria del techo de la nave acelerada, donde se recibe la luz
- En rojo las trayectorias de los frentes de onda

Numeramos con n=0,1,2,3,4,5…etc los frentes de onda, siendo sus trayectorias:

$x_n(t)=c.(t-n/f)$ para el frente de ondas n-ésimo

'f' es la frecuencia, 1/f es el período o separación temporal entre pulsos de máxima energía

$x_H(t)=H+ \frac{1}{2}.a_o.t^2$ es la trayectoria del techo de la nave.



Los instantes en que se reciben los pulsos de energía surgen de intersectar rojo con azul $x_n(t)=x_H(t)$:

$c.(t-n/f)=H+ \frac{1}{2}.a_o.t^2$

$\frac{1}{2}.a_o.t^2-c.(t-n/f)+H=0$

$a_o.t^2-2c.t+2nc/f+2H=0$ →solución ecuación de 2do grado

$t(n)=\{c-\sqrt{c^2-2a_o.[nc/f+H]}\}/a_o$

Los tiempos entre la recepción de dos pulsos consecutivos son t(1)–t(0), t(2)–t(1), …etc

La frecuencia recibida en el techo la aproximamos por $1/f_r=\partial t/\partial n$ evaluado en n=0

$1/f_r=\partial t/\partial n$

$1/f_r=-1/(2a_o\sqrt{\ }).(-2a_o.c/f)$

$1/f_r=c/f/\sqrt{\ }$

$f_r=f/c.\sqrt{\ }$

$f_r=f/c.\sqrt{c^2-2a_o.[nc/f+H]}$ →evaluamos en n=0

$f_r\approx f.\sqrt{1-2a_o.H/c^2}$

$f_r\approx f.(1-a_o.H/c^2)$ aproximando para $a_o.H\ll c^2$

Esto justifica nuestra precaución de 6.2.1 respecto a utilizar el símbolo ≈. No nos queda una igualdad exacta, solo algo aproximado válido para bajas velocidades y distancias cortas.

Salvando ese detalle, tenemos un segundo fenómeno (efecto Doppler gravitatorio) descrito con ecuaciones equivalentes en dos escenarios distintos con la identificación $|\vec{a_o}|=|\vec{g}|$:

- referencial acelerado: análisis por frentes de onda y por potenciales retardados.
- referencial en reposo en presencia de gravedad: análisis cuántico en base a fotones.

Invitamos a los lectores a que se informen sobre la comprobación experimental de este fenómeno, por ejemplo visitando el enlace https://es.wikipedia.org/wiki/Experimento_de_Pound_y_Rebka

6.4 Sistema con aceleración uniforme.

Habiendo adquirido cierta confianza en la validez del Principio de Equivalencia, comenzamos ahora a incorporar las herramientas de la Relatividad Especial. Lo primero que debemos revisar es el concepto de *aceleración uniforme*: no puede transportarse libremente desde la Física Clásica hacia la Relatividad.
Si hubiera realmente aceleración uniforme A=du/dt ∀t, la nave o vehículo de nuestros experimentos evolucionaría con una velocidad u(t)=A.t. Luego de transcurrido un cierto tiempo t=c/A se alcanzaría el valor u=c y eventualmente se pasaría a valores de u>c. Esto no es posible en Relatividad debido a que la inercia de la nave aumenta indefinidamente cuando 'u' se acerca a 'c', lo que se traduce en una oposición a adquirir mayor velocidad.
Los escenarios más parecidos que podemos encontrar son:

- "aceleración propia" constante
- fuerza constante

6.4.1 Aceleración propia constante:

Suponemos que en un determinado instante la velocidad tiene un cierto valor u_o.
Mediante una transformación de Lorentz con $\gamma_u=1/\sqrt{1-u_o^2/c^2}$ nos situamos en Σ', un referencial "comóvil" que se mueve momentáneamente a la misma velocidad que la nave u_o. Lo que en inglés se llama "*momentarily comoving reference frame*" y se abrevia como *MCRF*. Al inicio del análisis la nave está quieta en ese referencial Σ' y comienza a moverse lentamente, siendo a_o su aceleración.
Una vez que la nave adquirió velocidad apreciable en ese referencial, nos pasamos a otro referencial acorde con la nueva velocidad (ahora diferente de la u_o anterior) y repetimos las mediciones.
La a_o debe ser la misma en todos los mini-experimentos, a eso nos referimos por aceleración propia constante.

→En Σ: $x=u_o.t + ½ A.t^2$ A=aceleración coordenada durante un breve intervalo
$x - u_o.t = ½ A.t^2$
$\gamma_u(x - u_o.t) = ½ \gamma_u A.t^2$ Reconocemos, por Lorentz: $x'= \gamma_u(x - u_o.t)$
$x' = ½ \gamma_u A.t^2$

La transformación de Lorentz que liga Σ con Σ' dice $t=\gamma_u.(t'+u_o/c^2.x')$
Mientras dura el experimento breve $t' \gg u_o/c^2.x'$ (x' muy chico, infinitésimo descartable de mayor orden t'^2)
→ $\mathbf{t \approx \gamma_u.t'}$. ($\gamma_u$ es el factor de dilatación entre tiempo coordenado y tiempo propio).
Lo cual conduce a:

$x' = ½ \gamma_u. A. t'^2.\gamma_u^2$
$x' = ½ \gamma_u^3.A.t'^2$

→En Σ' debería ser

$x' = ½.a_o.t'^2$

Entonces la equivalencia entre aceleraciones es $a_o=A.\gamma_u^3$

6.4.2 Fuerza constante:

Este otro enfoque utiliza el concepto visto en el capítulo 5.3, donde enunciábamos que la fuerza es derivada temporal de la cantidad de movimiento. Fuerza constante significa:

$dp/dt = f_o = cte$ →integramos en t, partiendo del reposo en t=0
$p(t)=f_o.t$ →sustituimos $p(t)=m_o.\gamma_u.u(t)$
$f_o.t = m_o.u.\gamma_u$ →llamamos $A_o=f_o/m_o$
→$A_o.t = u.\gamma_u$ (1)

Introducimos la relación $\gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$

$A_o.t = u/\sqrt{1-u^2/c^2}$
$A_o^2.t^2 = u^2/(1-u^2/c^2)$
$A_o^2.t^2.(1-u^2/c^2)= u^2$

$A_o^2.t^2 = u^2(1 + A_o^2.t^2/c^2)$ $\rightarrow u = A_o t/\sqrt{1 + A_o^2.t^2/c^2}$ (2)

Combinando (1) y (2) tenemos $\gamma_u = \sqrt{1 + A_o^2.t^2/c^2}$

La aceleración coordenada es A=du/dt. Por derivada del producto tenemos:

$u = A_o.t.(1 + A_o^2.t^2/c^2)^{-1/2}$

$A = A_o.(1 + A_o^2.t^2/c^2)^{-½} + A_o.t.\ (-½)(1 + A_o^2.t^2/c^2)^{-3/2}.2.A_o^2.t/c^2$

$A = A_o.(1 + A_o^2.t^2/c^2)^{-3/2}.\ [\ (1 + A_o^2t^2/c^2) - A_o^2t^2/c^2]$

$A = A_o.(1 + A_o^2.t^2/c^2)^{-3/2}.\ [1]$

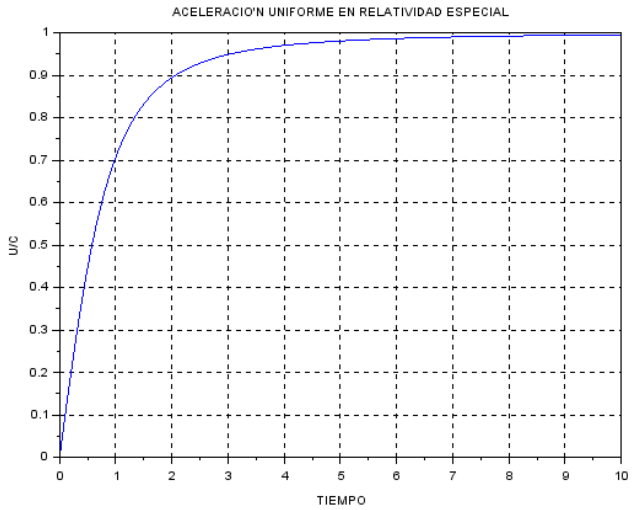
$A = A_o/\sqrt{1 + A_o^2.t^2/c^2}^{\ 3}$ $\rightarrow A = A_o/\gamma_u^3$

Con esto confirmamos que el $A_o=f_o/m_o$ del enfoque de fuerza constante es el mismo a_o=aceleración propia. Que se relaciona con la aceleración coordenada a través de la fórmula $A_o=\gamma_u^3.A$

Ambos enfoques conducen al mismo resultado. Para orientarnos mejor sobre lo que significa esta *fuerza constante*, podemos imaginar una nave donde se quema combustible siguiendo un conjunto de leyes físicas y químicas conocidas, y se lo expulsa con cierta velocidad opuesta a la trayectoria de la nave.

Ejercicio: Analizar el sistema de propulsión en un referencial móvil que acompaña brevemente a la nave. Calcular el empuje en función de la velocidad de expulsión u'_e y la tasa de consumo de combustible dm'/dt'.

Graficamos a continuación la función de velocidad coordenada: $u(t) = A_o t/\sqrt{1 + A_o^2.t^2/c^2}$



Reconocemos dos zonas bien diferenciadas en la gráfica:

- Para $t \ll c/A_o$, vale $\sqrt{\ } \approx 1$ y $u(t) \approx A_o.t$ $\rightarrow$recta con pendiente $\approx A_o$, límite clásico
- Para $t \gg c/A_o$, vale $\sqrt{\ } \approx A_o.t/c$ y $u(t) \approx c$ $\rightarrow$asíntota ≈horizontal, límite relativista

Observar que en este experimento se confirma el carácter límite que tiene la velocidad de la luz 'c': aceleramos indefinidamente a la nave pero no podemos alcanzar el límite, se cumple siempre $u(t)<c\ \forall t$.

Invitación a reflexionar: ¿Qué tal si en vez de gastar energía con nuestros motores dejamos que la gravedad haga el trabajo? Supongamos que un objeto de masa 'm' cae atraído gravitacionalmente por otro de masa 'M' siguiendo las leyes clásicas de Newton: Fuerza = $-m.M.G/r^2$. ¿Qué condiciones se tienen que cumplir para que el objeto 'm' alcance la velocidad de la luz 'c' antes de chocar contra la frontera del astro $r=R_a$?

Pista: *debe aparecer alguna expresión relacionada con el cociente adimensionado* $MG/(R_ac^2)$.

¿Podríamos *burlar* a la Relatividad o habría algún mecanismo de protección?

6.4.3 Longitud propia:

Retomamos la expresión $u = dx/dt = A_o t/\sqrt{1+ A_o^2.t^2/c^2}$ para integrar y obtener la trayectoria x(t).

Identificamos un diferencial exacto de raíz y buscamos soluciones de la forma $x(t) = \lambda + \mu.\sqrt{1+ A_o^2.t^2/c^2}$, con constantes λ,μ que deben ser ajustadas.

$dx/dt = \mu.A_o^2/c^2.t/\sqrt{1+ A_o^2.t^2/c^2}$ igualamos $\mu.A_o^2/c^2 = A_o \rightarrow \mu=c^2/A_o$

$$x = c^2/A_o.\sqrt{1+ A_o^2.t^2/c^2} + \lambda$$

La constante λ queda indeterminada.

Para el caso particular $\lambda=0$ la trayectoria resultante es una hipérbola, lo cual se puede ver elevando al cuadrado y restando.

$$x^2 = c^4/A_o^2.(1+A_o^2.t^2/c^2)$$
$$x^2 = c^4/A_o^2 + c^2.t^2$$
$$x^2 – c^2.t^2 = c^4/A_o^2$$

Para $\lambda \neq 0$ se forma una familia de hipérbolas paralelas, que en un principio podríamos pensar que representan distintos puntos de la nave que estamos estudiando. Por ejemplo, si la nave tiene altura H:

$\lambda=0$ podría ser el piso de la nave $\lambda=H$ podría ser el techo de la nave

Los conceptos de techo, piso, altura, vertical… tienen sentido porque la aceleración impone esa orientación.

Según esta conjetura, tendríamos:

$x_0(t) = c^2/A_o.\sqrt{1+ A_o^2.t^2/c^2} + 0$ para el piso

$x_H(t) = c^2/A_o.\sqrt{1+ A_o^2.t^2/c^2} + H$ para el techo

Si cortamos ambas trayectorias en el mismo tiempo ‘t’, nos da $x_H(t)–x_0(t) = H$ cte $\forall t$.

Esto no es compatible con el fenómeno relativista de contracción de longitudes.

La longitud que debería ser constante es la longitud propia, medida en un referencial solidario a la nave.

En el sistema Σ deberíamos observar que $x_H–x_0$ disminuye progresivamente a medida que $\gamma_u \rightarrow \infty$.

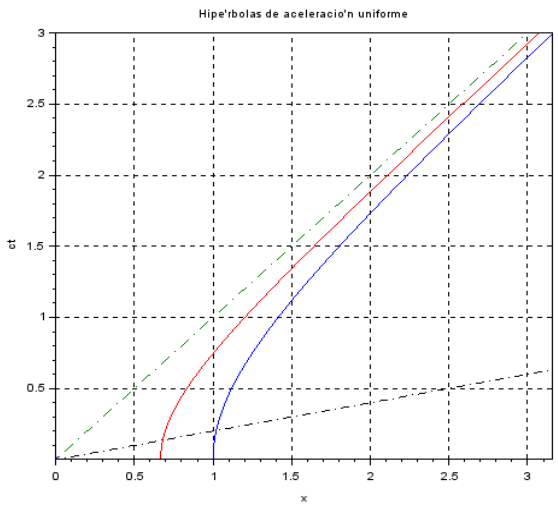
Hay otras alternativas de formar familias de hipérbolas que sean compatibles con la contracción de longitudes. Una posibilidad es suponer siempre nula la constante de integración $\lambda=0$, pero hacer variar la aceleración. Lo que se forma es una familia de hipérbolas con la misma asíntota común x=ct.

$x_0(t) = c^2/A_o.\sqrt{1+ A_o^2.t^2/c^2}$ para el piso de la nave

$x_H(t) = c^2/A_H.\sqrt{1+ A_H^2.t^2/c^2}$ para el techo de la nave

Debe ser $A_H<A_o$: el techo debe acelerar menos para no alejarse indefinidamente del piso, o para permitir que el piso pueda seguirlo (dicho en términos precarios).

Los puntos de corte para t=0 son $X_0=c^2/A_o$ y $X_H=c^2/A_H$, con $X_H>X_0$



En la gráfica anterior se representan (sin respetar la escala):
→ en rojo: la trayectoria del piso → en azul: la trayectoria del techo
→ en verde punteado: la asíntota x=ct → en negro punteado: una recta ct=β.x para un cierto β<1

Vamos a demostrar que la recta punteada negra corta a ambas hipérbolas en un punto de igual pendiente, lo que significa: un punto en el cual el techo y el piso viajan a la misma velocidad.
Las hipérbolas pueden expresarse:

piso: $x^2–c^2.t^2 = X_0^2$ techo: $x^2–c^2.t^2 = X_H^2$

Diferenciando:

$2x.dx–2c^2.t.dt=0$ →esto no depende de X_0 ni de X_H,
es una propiedad común a todas las hipérbolas de la familia.

$dx/dt = c.\ ct/x$

$dx/dt = c.\beta$

Tanto la hipérbola del piso como la del techo cortan a la recta $ct=\beta.x$ en *puntos* en los que tienen la misma velocidad $dx/dt=c.\beta$. (*Puntos del dibujo, que corresponden a eventos del espaciotiempo*).
Por otro lado, el ángulo θ que forma la recta negra punteada con el eje horizontal es el mismo ángulo que tienen las hipérbolas con el eje vertical, en el punto en el que ocurre el corte: $tg(\theta)=\beta$.
En virtud de lo visto al introducir la Transformación de Lorentz en 4.1, sabemos que la recta negra punteada es una línea de simultaneidad.
Cuando aplicamos una transformación de Lorentz para acompasarnos con el piso de la nave, en ese referencial el techo se ve también quieto.
Igualmente, cuando aplicamos la transformación de Lorentz para acompasarnos con el techo de la nave, en ese referencial el piso se ve quieto.
→Entonces la longitud que midamos en esos referenciales comóviles va a ser la longitud propia de la nave, y esa cantidad es la que debe mantenerse constante. La que midamos en el referencial Σ va a estar contraída por un factor γ_u de Lorentz.

Otra forma de ver esto:

$x_P(t) = \sqrt{Xo^2 + c^2t^2}$ $x_T(t) = \sqrt{X_H^2 + c^2t^2}$

Longitud en Σ = diferencia $x_T(t)–x_P(t)$ para un mismo 't'.
En el límite en que X_H y Xo están muy próximos, $X_H=Xo + H$ con $H \ll Xo$, $H \ll ct$
Ejercicio: Calcular numéricamente $Xo=c^2/Ao$ para una aceleración igual a la gravedad terrestre Ao=g, y comprobar que es razonable la hipótesis $H \ll Xo$.

$X_H^2 =(Xo+H)^2 \approx Xo^2 + 2.Xo.H$ descartando H^2 por ser infinitésimo de orden superior

$x_T(t) \approx \sqrt{X_O^2 + 2.H.Xo + c^2t^2}$

$x_T(t) \approx \sqrt{X_O^2 + c^2t^2 + 2.H.Xo}$

$x_T(t) \approx \sqrt{X_O^2 + c^2t^2}\ .\sqrt{1+ 2.H.Xo/(X_O^2 + c^2t^2)}$ Aplicamos Taylor $(1+\delta)^{½} \approx 1+\delta/2$

$x_T(t) \approx \sqrt{X_O^2 + c^2t^2}\ .[1+ H.Xo/(X_O^2 + c^2t^2)]$ expandimos

$x_T(t) \approx \sqrt{X_O^2 + c^2t^2} + H.Xo.\sqrt{X_O^2 + c^2t^2}\ /(X_O^2 + c^2t^2)]$ simplificamos raíz

$x_T(t) \approx \sqrt{X_O^2 + c^2t^2} + H.Xo/\sqrt{X_O^2 + c^2t^2}$ reconocemos $x_P(t)$

$x_T(t) \approx x_P(t) + H.Xo/\sqrt{X_O^2 + c^2t^2}$

$longitud\Sigma = x_T(t)–x_P(t) \approx H.Xo/\sqrt{X_O^2 + c^2t^2}$

$longitud\Sigma \approx H / \gamma_u$

Confirmamos que la longitud medida en Σ es siempre la longitud propia H contraída por factor γ_u.

Ejercicio: Demostrar este último paso, que $\sqrt{X_O^2 + c^2t^2}\ /Xo=\gamma_u$

Sugerencia: Utilizar $Xo=c^2/A_o$ y $\gamma_u=\sqrt{1+A_o^2t^2/c^2}$

6.4.4 Tiempo propio:

Operamos a partir de $\gamma_u =\sqrt{1+A_o^2t^2/c^2}$ reconociendo que $\gamma_u= dt/d\tau$

$dt/d\tau = \sqrt{1+A_o^2t^2/c^2}$

La integración de esta ecuación diferencial involucra funciones de trigonometría hiperbólica, algo que no debería sorprendernos si acabamos de ver trayectorias hiperbólicas en el plano x-ct.
Proponemos una solución de seno hiperbólico con K= cte a determinar.

$A_o.t/c = sh(K.\tau)$

$A_o.dt/c = ch(K.\tau).K.d\tau$ sustituimos $ch^2=1+sh^2$

$A_o.dt/c = \sqrt{1+sh^2(K\tau)}\ .K.d\tau$

$A_o.dt/c = \sqrt{1+sh^2(K\tau)}\ .K.d\tau$

$A_o.dt/c = \sqrt{1+A_o^2t^2/c^2}\ .K.d\tau$

$dt/d\tau = c.K/A_o.\sqrt{1+A_o^2t^2/c^2}$

→la cte K se despeja de $c.K/A_o=1$ $K=A_o/c$

Entonces queda:

$$A_o.t/c = sh(A_o.\tau/c)$$

Intersectamos las trayectorias del piso y del techo de la nave con la recta $ct=\beta.x$; dicha recta corta a ambas hipérbolas en un punto en que tienen la misma velocidad $u=c.\beta$ y el mismo factor $\gamma_u=1/\sqrt{1-\beta^2}$

$A_o.t/c = sh(A_o.\tau/c)$ Sustituimos $t=\beta.x/c$:

$A_o.\beta x/c^2 = sh(A_o.\tau/c)$

$A_o.\beta x/c^2 = sh(A_o.\tau/c)$ reconocemos $x=Xo.\gamma_u$

$A_o.\beta Xo.\gamma_u/c^2 = sh(A_o.\tau/c)$

$A_o.\beta Xo.\gamma_u/c^2 = sh(A_o.\tau/c)$ Finalmente sustituimos $Xo=c^2/A_o$

$\beta.\gamma_u = sh(A_o.\tau/c)$

$\tau = c/A_o.\ argsh(\beta.\gamma_u)$

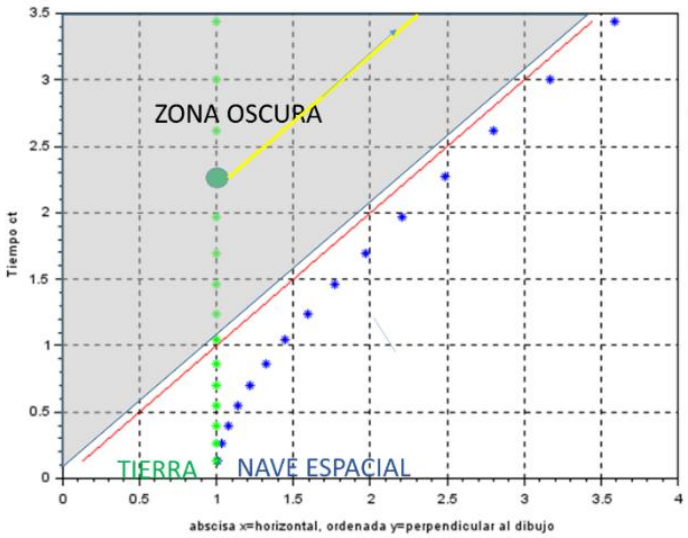
$c.\tau = Xo.\ argsh(\beta.\gamma_u)$ para el piso

$c.\tau = X_H.\ argsh(\beta.\gamma_u)$ para el techo

Esto debe ser analizado con atención.
La recta de simultaneidad corta a ambas trayectorias en eventos que corresponden a iguales factores β, γ_u.
Sin embargo, el tiempo propio transcurrido desde el inicio del movimiento acelerado es mayor en el techo que en el piso, por un factor X_H/Xo.

6.4.5 Atrapados en la "*zona oscura*":

Analizamos ahora un escenario que pone de manifiesto una curiosidad de los sistemas acelerados.
Dibujamos en forma de asteriscos la trayectoria espacio-temporal de dos observadores:



En la figura marcamos con color gris una región del espacio-tiempo descrita como "zona oscura", por encima de la recta x=ct bisectriz de los ejes coordenados (ángulo 45°).
Desde esa región (punto verde grueso) ya no sería posible conectarse con los asteriscos azules (la nave espacial) porque habría que viajar más rápido de la luz, con ángulo menor a 45°.
En amarillo trazamos un "intento" de enviar señales luminosas desde la Tierra hacia la nave, desde un punto interior a la región oscura. Vemos que con sus trayectorias de 45°, la luz no puede alcanzar a los eventos asociados a la nave espacial. Por esa razón los habitantes de la nave perciben a esta zona como "oscura", porque no pueden recibir ninguna luz proveniente de allí. También, desde su perspectiva describen a los puntos verdes de esa región como atrapados dentro de un pozo del cual no pueden salir.
El Principio de Equivalencia siembra la idea de que algo similar podría ocurrir en zonas con determinada configuración gravitatoria; lo analizaremos en una próxima sección dedicada a la Gravedad Planetaria.

El límite dibujado en rojo (la recta x=ct) se llama "horizonte Rindler". La palabra *horizonte* hace alusión a que no podemos ver lo que está oculto detrás de esa frontera. El nombre Rindler honra al físico austríaco que lo estudió, y que propuso un conjunto de coordenadas que nos resultarán muy útiles para describir sistemas acelerados.

6.5 Coordenadas de Rindler.

Hasta ahora estamos utilizando un único recurso para acompasarnos al movimiento de la nave: son las transformaciones de Lorentz que nos ubican en sistemas comóviles Σ'. Estos sistemas acompañan a la nave durante un breve tiempo y luego pierden utilidad por causa de la aceleración de la nave, debemos descartarlos y pasar a un nuevo Σ'. Solo podemos acompañar a la nave mediante una familia de infinitos referenciales Σ'.

Ahora por primera vez vamos a ensayar una transformación de coordenadas que involucra un sistema no-inercial. Un único sistema de coordenadas CT,X que se mantiene en forma permanente solidario a la nave.

Partimos de las trayectorias:

$x^2-c^2t^2=Xo^2$ para el piso de la nave, $X=Xo$

$x^2-c^2t^2=X_H^2$ para el techo de la nave, $X=X_H$

Definimos $x^2-c^2t^2=X^2$. X es la abscisa de Rindler.

Los lugares geométricos X=cte son hipérbolas con asíntota común x=ct.

Luego usamos la propiedad de la trigonometría hiperbólica $ch^2 - sh^2 = 1$

$x=X.ch(\alpha.T)$ $ct=X.sh(\alpha.T)$ T = coordenada temporal de Rindler

Los lugares geométricos T=constante son rectas por el origen, ecuación $ct/x = th(\alpha.T)$,
son las líneas de simultaneidad de los referenciales comóviles de Lorentz.

El parámetro 'α' se puede ajustar para que coincida el tiempo coordenado 'T' con el tiempo propio 'τ' ($T=\tau$) en algún lugar particular de la nave, por ejemplo en el techo.

Hace un par de párrafos vimos $A_o.t/c = sh(A_o.\tau/c)$ para el piso.

Algo similar vale para el techo: $A_H.t/c = sh(A_H.\tau/c)$

Que re-escrito en términos de $X_H=c^2/A_H$ toma la forma:

$c.t/X_H = sh(c.\tau/X_H)$

$c.t = X_H.sh(c.\tau/X_H)$ fórmula 6.4.4

$ct = X.sh(\alpha.T)$ cambio de variable Rindler

→aquí identificamos $\alpha=c/X_H$ para que coincida $T=\tau$ en $X=X_H$

Con lo que queda completa la propuesta de coordenadas (ct,x,y,z)→(CT,X,Y,Z):

$c.t = X.sh(c.T/X_H)$ $x = X.ch(c.T/X_H)$ $y = Y$ $z = Z$

Observación: Esta transformación de coordenadas *no es lineal*, se marca así una primera diferencia con las transformaciones lineales de Lorentz de la Relatividad Especial.

A lo largo de nuestro trabajo veremos que este tipo de transformaciones aceleradas, debido a su carácter no lineal, comparten propiedades con los cambios de variables para pasar a coordenadas curvilíneas.

Al evolucionar desde la Relatividad Especial hacia la Relatividad General, parte de los avances consisten en reutilizar las formulaciones tensoriales para cambios de variable *generales*.

La invarianza del intervalo métrico fundamental se mantiene aún durante el cambio de variables no lineal.

Describimos con minúscula las coordenadas de Minkowski y con mayúscula las de Rindler.

$(dS)^2=\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha.dx^\beta$ →sustituimos $dx^\alpha=\partial x^\alpha/\partial X^\lambda.dX^\lambda$ $dx^\beta=\partial x^\beta/\partial X^\mu.dX^\mu$

$(dS)^2=\eta_{\alpha\beta}\partial x^\alpha/\partial X^\lambda.dX^\lambda\partial x^\beta/\partial X^\mu.dX^\mu$ →reagrupamos

$(dS)^2=\eta_{\alpha\beta}.\partial x^\alpha/\partial X^\lambda.\partial x^\beta/\partial X^\mu.dX^\lambda.dX^\mu$

$(dS)^2=\eta_{\alpha\beta}.\partial x^\alpha/\partial X^\lambda.\partial x^\beta/\partial X^\mu.dX^\lambda.dX^\mu$

$(dS)^2=g_{\lambda\mu}.dX^\lambda.dX^\mu$ →nos queda la métrica en las nuevas coordenadas

Reflexión: Este es un caso similar al presentado en 5.6.4 para el tensor de campo electromagnético.
El tensor métrico, de rango 2, precisa 2 productos matriciales para convertirse de un sistema Σ a otro Σ'.

En el cambio de variables de Rindler que estamos estudiando, buscamos ecuaciones que relacionen los diferenciales de coordenadas de acuerdo con $dx^\alpha=\partial x^\alpha/\partial X^\lambda.dX^\lambda$.

Abreviamos la notación del factor $(cT/X_H)\rightarrow(.)$

$c.dt = dX.sh(.) + X.ch(.).c/X_H.dT$

$dx = dX.ch(.) + X.sh(.).c/X_H.dT$

$dy = dY$

$dz = dZ$

Elevamos al cuadrado:

$c^2.dt^2 = (dX)^2.sh^2(.) + 2.X.ch(.).c/X_H.dT.sh(.).dX + X^2.ch^2(.).c^2/X^2_H.(dT)^2$

$(dx)^2 = (dX)^2.ch^2(.) + 2.X.sh(.).c/X_H.dT.ch(.).dX + X^2.sh^2(.).c^2/X^2_H.(dT)^2$

$(dy)^2 = (dY)^2$

$(dz)^2 = (dZ)^2$

Restamos y aplicamos fórmulas de trigonometría hiperbólica ch^2-sh^2=1:

$(dS)^2 = -c^2.dt^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

$(dS)^2 = (dX)^2.[ch^2(.) - sh^2(.)] + (dT)^2.X^2.c^2/X_H^2.[sh^2(.) - ch^2(.)] + (dY)^2 + (dZ)^2$

$$(dS)^2 = -(X/X_H)^2.(c.dT)^2 + (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2$$

Esto que acabamos de resaltar se llama métrica de Rindler y también se puede expresar con el signo opuesto, teniendo en cuenta $(dS)^2 = -(c.d\tau)^2$

$$(c.d\tau)^2 = (X/X_H)^2.(c.dT)^2 - (dX)^2 - (dY)^2 - (dZ)^2$$

En varios pasajes de este trabajo utilizaremos la expresión "métrica" indistintamente, para referirnos tanto a $(dS)^2$ como a su versión negada $(c.d\tau)^2$. En cada caso el contexto intentará dejar claro a qué expresión nos estamos refiriendo.

Todos los diferenciales dT,dX,dY,dZ conectan 2 eventos cercanos en el espaciotiempo, y la métrica (ya sea dS o dτ) cuantifica tiempos y distancias.

La interpretación en 'τ' es interesante: el tiempo propio difiere del tiempo coordenado *aún para objetos quietos,* algo que no pasaba en los sistemas inerciales de la Relatividad Especial.

Si los dos eventos corresponden a la línea de Universo "*world-line*" de un mismo objeto quieto en el referencial de Rindler, tenemos dX=0, dY=0, dZ=0, solo $dT\neq 0 \rightarrow$ el tiempo propio fluye diferente según la posición donde está el observador. El factor de dilatación temporal vale (X_H/X), es unitario en el techo $X=X_H$ pero crece a medida que bajamos en la nave $X<X_H$.

Esta nave acelerada simula en su interior un campo gravitatorio con un vector de gravedad que apunta hacia abajo. La dilatación temporal es más pronunciada cuanto más nos sumergimos hacia abajo en el "pozo de potencial", y según el Principio de Equivalencia, esto mismo debería observarse en los campos gravitatorios creados por astros masivos.

6.5.1 Lagrangeano de Rindler:

El Lagrangeano se construye a partir del 'dτ' como el integrando de la acción $S = -m_o.c^2.\int d\tau = \int \mathcal{L}.d\tau$

El Lagrangeano es un invariante relativista y su valor numérico sigue siendo $\mathcal{L} = -m_o.c^2$, lo que significa que los principios variacionales deben seguir siendo válidos pero en las nuevas coordenadas CT, X.

Por simplicidad omitimos las coordenadas Y,Z.

$\mathcal{L}(cT,X,c\dot{T},\dot{X},\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(X/X_H)^2.\dot{T}^2 - \dot{X}^2/c^2}$ $\qquad$ $\sqrt{\ }=1$, $\dot{X}=dX/d\tau$, $\dot{T}=dT/d\tau$.

Momento en X: $\qquad P_X = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{X}$

$P_X = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).[-2.\dot{X}/c^2]$

$P_X = m_o.\dot{X}$

Ecuación de Lagrange:

$dP_X/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial X + F_X$

$m_o.d\dot{X}/d\tau = F_X - m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).2.X/X_H^2.\dot{T}^2$

$d\dot{X}/d\tau = -c^2.X/X_H^2.\dot{T}^2$

F_X serían otras fuerzas actuando sobre una masa de prueba, por el momento las ignoramos porque solo nos interesa la "fuerza gravitatoria" que produce caída libre.

Además, consideramos innecesario integrar en forma exacta esta ecuación; nos conformamos con resolver lo que sería una *caída libre incipiente* durante los primeros instantes en que recién comienza.

Si arrancamos desde el techo, allí vale $\dot{T}=1$. Y mientras haya poco apartamiento va a ser $X \approx X_H$, $\dot{T} \approx 1$.

$d\dot{X}/d\tau \approx -c^2/X_H$ →reconocemos $A_H=c^2/X_H$

$d\dot{X}/d\tau \approx -A_H$

La aplicación de los principios variacionales da el mismo resultado conocido de la Física Clásica, ahora con una nueva interpretación: el tiempo propio varía según la posición dentro del *campo gravitatorio*, y como resultado de la maximización del tiempo propio lo que se observa es una caída libre con aceleración $-A_H$, de signo negativo porque es hacia *abajo*. Y numéricamente igual a la A_H con la que se acelera la nave.

El Lagrangeano está perturbado en forma similar al del caso electromagnético, aunque hay algunas diferencias. La más evidente es que la perturbación es multiplicativa en lugar de aditiva, no es inmediato separar parte cinética y parte potencial.

Si lo que queremos es simular aceleración terrestre con $A_H \approx g$, entonces $X_H=c^2/A_H \approx 10^{16}$ metros.

Con esos números parece bastante razonable suponer $H \ll X_H$, siendo H la altura de la nave donde realizamos los experimentos mentales.

Podemos definir una coordenada local h, $-H \leq h \leq 0$ (h = –H describe la base, h = 0 describe el techo).

$X=X_H+h$ $\qquad\qquad$ $\dot{X} = \dot{h}$

El Lagrangeano adquiere la forma:

$\mathcal{L}(cT,h,c\dot{T},\dot{h},\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(X_H+h)^2/X_H^2.\dot{T}^2 - \dot{h}^2/c^2}$

$\mathcal{L}(cT,h,c\dot{T},\dot{h},\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(1+h/X_H)^2.\dot{T}^2 - \dot{h}^2/c^2}$ →aprox. para $h \ll X_H$

$\mathcal{L}(cT,h,c\dot{T},\dot{h},\tau) \approx -m_o.c^2.\sqrt{(1+2.h/X_H).\dot{T}^2 - \dot{h}^2/c^2}$

$\mathcal{L}(cT,h,c\dot{T},\dot{h},\tau) \approx -m_o.c^2.\sqrt{(1+2.h/X_H).\dot{T}^2 - \dot{h}^2/c^2}$ →sust. $X_H=c^2/A_H$

$\mathcal{L}(cT,h,c\dot{T},\dot{h},\tau) \approx -m_o.c^2.\sqrt{(1+\mathbf{2.A_H.h/c^2}).\dot{T}^2 - \dot{h}^2/c^2}$

Con esta linealización por Taylor aparece un término aditivo, que responde a la fórmula:

$\mathcal{L}(cT,h,c\dot{T},\dot{h},\tau) \approx -m_o.c^2.\sqrt{(1+\mathbf{2.u_{pot}/c^2}).\dot{T}^2 - \dot{h}^2/c^2}$

$U_{pot}=m.A_H.h$	potencial gravitatorio similar al $U_g=m.g.z$ de la gravedad terrestre según 'z'
$u_{pot}=U_{pot}/m=A_H.h$	potencial por unidad de masa
$m=\dot{T}.m_o$	masa relativista
$\gamma_u = \dot{T}$	factor de dilatación temporal

Al igual que vimos en el capítulo 5.5, ahora nos vuelve a aparecer un término potencial con signo opuesto a los cinéticos ($\dot{h}^2$ en este ejemplo). El factor de escala es levemente diferente: $\dot{T}^2$ en lugar de $\dot{T}$, y veremos en el capítulo 7 que ese factor $\dot{T}^2$ elevado al cuadrado va a generar repercusiones que no aparecían en el caso electromagnético.

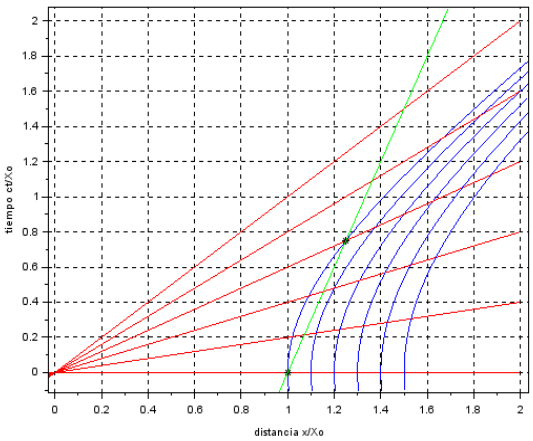
También hay una diferencia destacable: los campos electromagnéticos por sí solos, en ausencia de gravedad, no alteraban las trayectorias luminosas. El Lagrangeano tenía sumado un término proporcional a la carga 'q', que es nula para los fotones. ¡Pero este Lagrangeano de Rindler sí altera los trayectos luminosos! En la sección 6.6 lo veremos en mayor detalle.

6.5.2 Maximización del tiempo propio 'τ':

Enfocamos desde otro punto de vista un concepto ya introducido en la sección 5.4: en ausencia de fuerzas perturbadoras, *las trayectorias que siguen las partículas son las que maximizan su tiempo propio (minimizan su métrica cuadridimensional)*.

Consideramos una partícula que comienza en el *piso* de la nave en T=0 y vuelve allí en $T=T_o$.
Esta partícula es participante de dos eventos en el espacio-tiempo,
A) T=0, $X=X_o$, Y=0, Z=0 B) $T=T_o$, $X=X_o$, Y=0, Z=0
dibujados como asteriscos negros en la carta de Rindler.

- Las hipérbolas azules son las curvas que tienen constante la coordenada espacial Rindler X.
- Las rectas rojas corresponden a valores constantes de la coordenada Rindler temporal T=cte.



- El suceso *origen* es la intersección de la recta T=0 con la hipérbola $X=X_o$.
- El suceso *destino* es la intersección de la recta $T=T_o$ con la hipérbola $X=X_o$.
- Ambos eventos están unidos por la recta verde, que sabemos que es la trayectoria que maximiza el tiempo propio de acuerdo a las fórmulas de la Relatividad Especial (si analizamos el problema en el referencial de coordenadas Minkowski $\Sigma\{x,ct\}$ donde la trayectoria conocida es una recta).

Puede observarse que la recta verde se aleja de la hipérbola $X=X_o$ (piso de la nave), *sube* hasta coordenadas más *altas* $X>X_o$, se frena y luego *baja* hasta retornar a $X=X_o$ en $T=T_o$.
En el referencial solidario a la nave, la trayectoria que maximiza el tiempo propio es una curva con aceleración uniforme. Su expresión en coordenadas de Rindler es $X(T) \approx X_o + V_o.T - \frac{1}{2} .A_H.T^2$.
V_o y A_H se ajustan para cumplir las condiciones de borde $X(0)=X_o$ y $X(T_o)=X_o$.

<u>La interpretación es la siguiente</u>:

- Si no hubiera *gravedad*, el tiempo propio se maximizaría con la partícula quieta $X(T)=X_o \; \forall T$.
- Habiendo *gravedad*, la partícula tiene la posibilidad de ganar tiempo propio subiendo a zonas donde el potencial gravitatorio es más alto y el factor de dilatación temporal gravitatorio es menor (*pudiendo incluso volverse menor a 1 y transformarse en una contracción temporal; posibilidad que no contemplamos en este momento porque implica salir fuera de la nave hacia el espacio exterior*).
- Para lograr esa excursión hacia zonas más altas la partícula debe adquirir algo de velocidad, lo que ocasiona cierta pérdida de tiempo propio por la dilatación temporal cinemática estudiada en Relatividad Especial.
- La aceleración de valor A_H es la dosificación justa que maximiza la diferencia entre las ganancias gravitatorias y las pérdidas cinemáticas de tiempo propio.

Este es uno de los pocos casos en que podemos realizar un cálculo *artesanal* sin recurrir a principios variacionales. Consideramos una partícula inmersa en un campo gravitatorio variable según la altura 'z' y de potencial por unidad de masa $\Phi_g(z)=g.z$, y suponemos que su tiempo propio varía con la posición como si estuviera en un espacio Rindler, afectado por el potencial gravitatorio Φ_g.

$d\tau=\sqrt{[1+2\Phi_g/c^2]dt^2-dz^2/c^2}$ (ignoramos las restantes coordenadas)

$d\tau=dt.\sqrt{1+2\Phi_g/c^2-u_z^2/c^2}$ siendo $u_z=dz/dt$

$d\tau\approx dt.(1+\Phi_g/c^2-\frac{1}{2}.u_z^2/c^2)$ en el límite clásico de los campos bajos

$d\tau\approx dt.(1+g.z/c^2-\frac{1}{2}.u_z^2/c^2)$

$\tau \approx \int_{[0,t_o]}(1+g.z/c^2 - \frac{1}{2}.u_z^2/c^2)dt$ integral en el intervalo desde t=0 hasta $t=t_o$

$\tau \approx t_o.[1 + g.\langle z\rangle/c^2 - \frac{1}{2}.\langle u_z^2\rangle/c^2]$ $\langle z\rangle$, $\langle u_z^2\rangle$ son los valores medios en el intervalo $[0,t_0]$

Estudiamos la familia de trayectorias de movimiento uniformemente acelerado $z(t)=v.t - a.t^2/2$

Para cumplir con las condiciones de extremo $z(0)=z(t_o)=0$ se requiere $v=a.t_o/2$

$z(t)=a/2.(t_o.t-t^2)$

$u_z=dz/dt= a/2.(t_o-2.t)= a.(t_o/2-t)$

$u_z^2= a^2.(t_o^2/4 - t.t_o + t^2)$

Los valores medios en el intervalo $[0,t_0]$ son:

$\langle z\rangle = a/2.(t_o.\langle t\rangle - \langle t^2\rangle)$

$\langle z\rangle = a/2.(t_o.t_o/2 - t_o^2/3)$

$\langle z\rangle = a/2.t_o^2(1/2-1/3)$

$\langle z\rangle = a/2.t_o^2/6$

$\langle z\rangle = a.t_o^2/12$

$\langle u_z^2\rangle = a^2.(t_o^2/4 - \langle t\rangle.t_o + \langle t^2\rangle)$

$\langle u_z^2\rangle = a^2.(t_o^2/4 - t_o/2.t_o + t_o^2/3)$

$\langle u_z^2\rangle = a^2.t_o^2(1/4-1/2+1/3)$

$\langle u_z^2\rangle = a^2.t_o^2(-1/4+1/3)$

$\langle u_z^2\rangle = a^2.t_o^2/12$

Sustituyendo los valores medios tenemos:

$\tau \approx t_o.[1 + g.\langle z\rangle/c^2 - \frac{1}{2}.\langle u_z^2\rangle/c^2]$

$\tau \approx t_o.[1 + g.a.t_o^2/12/c^2 - \frac{1}{2}.a^2.t_o^2/12/c^2]$

$\tau(a) \approx t_o.\{1 + t_o^2/(12c^2).[a.g - \frac{1}{2}.a^2]\}$

El problema variacional de una función incógnita queda ahora reducido a un problema algebraico de maximizar una función de una variable $\tau(a)$.

Para a=0 (reposo) se obtiene un valor subóptimo $\tau=t_o$

Para a=2g (aceleración excesiva) se repite el valor subóptimo $\tau=t_o$

$\partial\tau/\partial a = t_o^3/(12c^2)[g-a]$ →se anula en a=g

Para a=g (aceleración en dosis justa) se obtiene el óptimo $\tau = t_o.[1+ g^2t_o^2/(24c^2)]$

6.5.3 Cuadri-aceleración:

Imaginamos ahora una partícula en reposo en el espaciotiempo de Minkowski: $t=\tau$, $x=X_H$, y=0, z=0 $\forall\tau$.

Posición: $X^\alpha=(c\tau, X_H, 0, 0)$ Cuadrivelocidad: $U^\alpha=dX^\alpha/d\tau=(c, 0, 0, 0)$

Cuadri-aceleración: $A^\alpha=dU^\alpha/d\tau=(0, 0, 0, 0)$

Con esta definición $A^\alpha=dU^\alpha/d\tau$, tenemos un cuadrivector de aceleración con sus 4 componentes nulas.

Las reglas de transformación de un buen cuadrivector mandan que si es nulo en Σ debería anularse en cualquier cambio de referencia hacia otro Σ'. Esperaríamos $A'^\lambda = \partial X'^\lambda/\partial X^\alpha . A^\alpha$

Sin embargo, no es lo que ocurre en un cambio de coordenadas con aceleración, como es el caso de Rindler.

$ct=X.sh(cT/X_H)$, $x=X.ch(cT/X_H)$ →inversión de fórmulas

$X=\sqrt{x^2-c^2t^2}$, $cT/X_H=argth(ct/x)$ →sustituimos $t=\tau$, $x=X_H$

$X(\tau)=\sqrt{x^2-c^2\tau^2}$, $cT(\tau)/X_H=argth(c\tau/X_H)$ →derivamos $d/d\tau$

$dX/d\tau= -\tau c^2/X$, $dT/d\tau=1/(1-c^2\tau^2/X_H^2)$

$d^2X/d\tau^2 \neq 0$ $d^2T/d\tau^2 \neq 0$ → $A'^\alpha=dU'^\alpha/d\tau \neq (0, 0, 0, 0)$

Sin profundizar demasiado en los cálculos, vemos que es evidente que la cuadriaceleración no es nula en el referencial de Rindler. **Las reglas de transformación no son las que esperamos para cuadrivectores bien comportados**. La equivalencia gravedad-aceleración nos alerta que *este mismo efecto lo sufriría cualquier intento de modelar la gravedad como fuerza, porque no se transforma como esperaríamos que lo hiciera una buena cuadrifuerza*.

Ya lo padecimos al inicio de este capítulo 6, al intentar aplicar transformaciones de Lorentz a la fuerza gravitatoria de Newton. Por eso nos embarcamos en el enfoque basado en la métrica y en las ecuaciones de Euler-Lagrange.

6.5.4 Lagrangeano y principios variacionales:

El Lagrangeano que construimos para las coordenadas Rindler es un caso particular de algo más general: la expresión definida en 5.4.4 puede pasarse a coordenadas arbitrarias, con métricas diferentes a la de Minkowski.

$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2 - \dot{x}^2/c^2 - \dot{y}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2}$ →generalizamos $\eta_{\alpha\beta}$ a $g_{\alpha\beta}$.

$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{-g_{\alpha\beta}\,U^\alpha U^\beta/c^2}$

Esto es válido para coordenadas cartesianas, coordenadas Rindler, coordenadas cilíndricas (lo veremos en la estación espacial de 6.6.4). Y también es generalizable a un espaciotiempo afectado por gravedad.

La acción es una integral cuyo integrando es el Lagrangeano: $Acc = \int \mathcal{L}\, d\tau$.
Los principios variacionales surgen de expresar las condiciones que producen una acción con $\delta Acc = 0$, que se mantenga estable frente a pequeñas variaciones: $\delta Acc = \int \delta\mathcal{L}\, d\tau$.
En nuestro caso $\mathcal{L}$ contiene a un factor raíz, que aunque es unitario puede generar en ocasiones cierta molestia y un deseo de formularlo de otra manera.

Expresamos: $\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{R}$, siendo R el radicando unitario $R = -g_{\alpha\beta}\,U^\alpha U^\beta/c^2$.
Tomamos variación de $\mathcal{L}$ siguiendo las reglas usuales de la diferenciación.

$\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{R}$
$\delta\mathcal{L} = -m_o.c^2.\,\delta\sqrt{R}$
$\delta\mathcal{L} = -m_o.c^2/(2\sqrt{R}).\delta R$ →usamos $\sqrt{\ }=1$
$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2}.m_o.c^2.\delta R$
$\delta\mathcal{L} = \delta(-\frac{1}{2}.m_o.c^2.R)$ →llamamos $L = -\frac{1}{2}.m_o.c^2.R$
$\delta\mathcal{L} = \delta L$

Podemos expresar la acción con otro Lagrangeano alternativo 'L' que produce la misma variación.

$L = -\frac{1}{2}.m_o.c^2.R$ → sustituimos $R = -g_{\alpha\beta}\,U^\alpha U^\beta/c^2$
$L = -\frac{1}{2}.m_o.c^2.(-g_{\alpha\beta}\,U^\alpha U^\beta/c^2)$
$L = \frac{1}{2}.m_o.(g_{\alpha\beta}\,U^\alpha U^\beta) = \frac{1}{2}.m_o.(U_\alpha U^\alpha)$

No tiene raíz ni signo negativo, se parece más a la energía cinética clásica y produce las mismas ecuaciones variacionales. Si queremos convencernos de algún caso particular, calculamos el momento asociado a alguna coordenada genérica X^h.

$L = \frac{1}{2}.m_o.g_{\alpha\beta}.U^\alpha U^\beta.$
$P_h = \partial L/\partial U^h$
$P_h = \frac{1}{2}.m_o.g_{\alpha\beta}.(\partial U^\alpha/\partial U^h.U^\beta + U^\alpha.\partial U^\beta/\partial U^h)$ →reconocemos δKronecker
$P_h = \frac{1}{2}.m_o.g_{\alpha\beta}.(\delta^\alpha{}_h.U^\beta + U^\alpha.\delta^\beta{}_h)$ →expandimos
$P_h = \frac{1}{2}.m_o.(g_{\alpha\beta}.\delta^\alpha{}_h.U^\beta + g_{\alpha\beta}.\delta^\beta{}_h.U^\alpha)$ →colapsamos las δKron
$P_h = \frac{1}{2}.m_o.(g_{h\beta}.U^\beta + g_{\alpha h}.U^\alpha)$

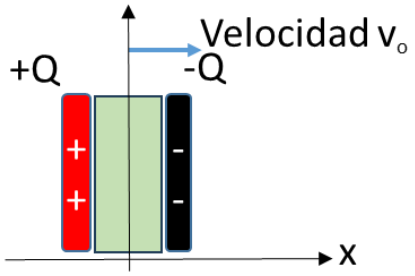
Reconocemos velocidades covariantes, resultados de bajar el índice a las contravariantes.

$P_h = \frac{1}{2}.m_o.(g_{h\beta}.U^\beta + g_{\alpha h}.U^\alpha)$
$P_h = \frac{1}{2}.m_o.(U_h + U_h)$
$P_h = \frac{1}{2}.m_o.(2U_h) \rightarrow \quad P_h = m_o.U_h$

Este Lagrangeano alternativo podríamos extenderlo a una partícula con carga eléctrica.

Simplemente le restaríamos el potencial variable con la velocidad como vimos en 5.5 y llegaríamos a:
$L= ½ .m_o.U_\alpha U^\alpha+q.A_\alpha U^\alpha$.
A_α es la forma covariante del cuadri-potencial electromagnético $A^\alpha=(\Phi/c,\vec{A})$.
En los capítulos siguientes continuaremos usando mayormente la versión de $\mathcal{L}$ con raíz, salvo en alguna ocasión en que decidamos entrenarnos en la formulación alternativa 'L'.

Actividad propuesta: A los efectos de adquirir entrenamiento con los métodos lagrangianos, sugerimos analizar un condensador móvil como se muestra en la figura.



El dieléctrico que rellena el espacio entre las placas, dibujado en verde en la figura, tiene permitividad $\epsilon\approx\epsilon_o$. Su presencia no apunta a modular la capacitancia, simplemente ofrece un soporte mecánico para evitar que las placas se atraigan una a la otra por acción electrostática.

Algunas cantidades a tener en cuenta son:

Masa en reposo de cada placa	m_o
Área de las placas	A (se extiende en el plano yz, no se ve en la figura plana)
Densidad superficial de carga	$\sigma=Q/A$
Campo eléctrico	$E=\sigma/\epsilon\approx\sigma/\epsilon_o$
Separación entre placas	e
Voltaje (diferencia de potencial)	$V_o=E.e$
Capacitancia	$C=\epsilon A/e$
Lagrangeano de cada placa	$L= ½ m_o (-c^2.\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 +\dot{z}^2) -q.\dot{t}\,\Phi + q(\dot{x}A_x+ \dot{y}A_y +\dot{z}A_z)$
Momento en la coordenada-x	$p_x =\partial L/\partial\dot{x} = m_o\dot{x} +qA_x$
Ecuación de Euler-Lagrange en 'x'	$dp_x/d\tau -\partial L/\partial x = F_x$

Para cada placa, F_x contiene la contribución del relleno que evita que las placas se encimen una a la otra. Y también contiene una contribución de un agente externo que intenta poner en movimiento con velocidad v_o a toda la estructura: placa(positiva) + relleno + placa(negativa).

En el referencial solidario a la estructura, el problema es puramente electrostático.
$A'_x=0$, no hay ningún efecto magnético
$\Phi' = +V_o/2$ para la placa positiva
$\Phi' = –V_o/2$ para la placa negativa
Por transformación de Lorentz calculamos $A_x =\gamma(A_x' +v_o/c^2.\,\Phi') = \gamma v_o/c^2.\Phi'$
Reconocemos que γv_o es la velocidad propia $\dot{x}$, y concluimos $A_x =\dot{x}/c^2\Phi'$.
El momento lagrangeano nos queda: $p_x =m_o\dot{x} +q\dot{x}\Phi'/c^2$
$p_x= \dot{x}.(m_o + q.\Phi'/c^2) = \dot{x}.(m_o + U'_{pot}/c^2)$
La cantidad $q.\Phi'$ es la energía potencial electrostática a la que está ubicada cada placa.
Es una cantidad positiva en ambos casos: la placa negativa (q=-Q) está a potencial negativo.

Nos reencontramos con el mismo resultado de 5.3.5: En la cantidad de movimiento relativista, la masa que multiplica a la velocidad propia puede tener otras contribuciones energéticas además de la masa propia.
En este caso la contribución es electrostática: $\mathbf{m_{eff} = m_o + U'_{pot}/c^2}$

6.6 Estudio métrico de la gravedad.

El enfoque métrico nos libera del problema del "mal comportamiento de la fuerza gravitatoria frente a transformaciones de coordenadas". También nos aporta nuevas herramientas matemáticas que nos ponen en condiciones de abordar con más rigor los dos fenómenos que habían sido descritos en forma semiclásica: la curvatura de la luz y el efecto Doppler.

En la Relatividad Especial tenemos $d\tau = \sqrt{(dt)^2 - (dx^2+dy^2+dz^2)/c^2}$

Para las partículas materiales el radicando debe mantenerse positivo para que la raíz no valga imaginaria, lo que marca que 'c' es el valor límite de la velocidad coordenada que pueden adquirir.
Esta velocidad límite solo la alcanzan las partículas *inmateriales* o las ondas electromagnéticas, que siguen trayectorias de métrica nula $d\tau=0$. Pueden verse como el caso límite de proyectiles ultraligeros ($m_o \to 0$) y ultraenergéticos con $\gamma=dt/d\tau \to \infty$.

La métrica Rindler trae sorpresas: $d\tau = \sqrt{(X/X_H)^2(dT)^2 - (dX^2+dY^2+dZ^2)/c^2}$

Los trayectos de métrica nula verifican:

$(dX^2+dY^2+dZ^2)/c^2=(X/X_H)^2dT^2$

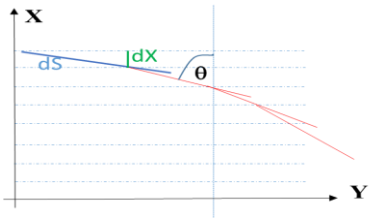
$(dX^2+dY^2+dZ^2)/dT^2= c^2.(X/X_H)^2 \quad \to u_c^2=(dX/dT)^2+(dY/dT)^2+(dZ/dT)^2$

$u_c^2=c^2.(X/X_H)^2 \quad \to u_c=\pm c.(X/X_H)$

No hay impedimento en que se cumpla $|u_c|\neq c$. De hecho, estos números están indicando que la velocidad coordenada de la luz solamente vale $u_c=c$ en el techo de la nave $X=X_H$.
Curiosidad: si nos aventuráramos a salir fuera del techo de la nave $X>X_H$, entraríamos a una zona interesante donde $u_c>c$. Aunque no nos conviene ilusionarnos con velocidades superlumínicas porque en la sección 6.5 elegimos arbitrariamente el punto de la nave en el que queríamos que el tiempo propio se alineara con el tiempo coordenado. La velocidad coordenada es muy sensible a los cambios de variable o a elecciones personales, no podemos darle significado físico a su valor absoluto. Sí podemos extraer conclusiones sobre la comparación entre dos valores próximos.
En zonas más bajas ($X<X_H$) la luz viaja más lentamente, y el efecto es más pronunciado cuanto más nos *sumergimos* en el pozo de gravedad. Esa velocidad 'u_c' variable con la posición es el límite al que pueden llegar las partículas materiales cuando diverge su factor $\gamma=dT/d\tau \to \infty$.

Desde el punto de vista óptico, el índice de refracción se define como $n=c/u_c$, en este caso es $n=X_H/X$.
Si la velocidad de la luz varía con la posición, tenemos un gradiente de índice de refracción y una posible forma de describir la curvatura de los rayos, similar a la que se observa en otros escenarios de la Física.

6.6.1 Curvatura de la luz: análisis por índice de refracción:



La región de índice de refracción variable la modelamos como formada por muchas capas finas de grosor dX, donde cada capa tiene un índice levemente diferente de las capas vecinas, con variación $\partial n/\partial X$.
El rayo viajero forma un ángulo θ con la recta normal a las superficies de separación de las capas.
La Ley de Snell de la refracción dice $n.\text{sen}(\theta) = \text{cte.}$
→ diferenciando tenemos $dn.\text{sen}(\theta) + n.\cos(\theta).d\theta = 0$

$d\theta = -dn/n.\text{sen}(\theta)/\cos(\theta)$

Por otro lado, la distancia recorrida al cruzar de una capa a la vecina es (dS) tal que

$(dS).\cos(\theta)=dX$ (*ver figura anterior*)

$dS=dX/\cos(\theta)$

La curvatura es $K_{urv} = d\theta / dS = -dn/n.sen(\theta)/cos(\theta) \; . \; cos(\theta)/dX$

$K_{urv} = -\, sen(\theta)/n.\; dn/dX$

En la nave con coordenadas Rindler, $n(X)=c/u_c = X_H/X$

Su gradiente es $\partial n/\partial X = -X_H/X^2$

Simplificando para pequeñas variaciones $X \approx X_H$ $\rightarrow \partial n/\partial X \approx -1/X_H$

Sustituyendo $X_H=c^2/A_H$ $\partial n/\partial X \approx -A_H/c^2$

$K_{urv} \approx sen(\theta)/n(X).\; \mathbf{A_H/c^2}$

En el límite de la incidencia rasante, $\theta \rightarrow \pi/2$, $sen(\theta) \rightarrow 1$, el resultado es igual al obtenido mediante el análisis de proyectiles fotónicos de 6.2. No continuamos aquel análisis para ángulos diferentes, sería un ejercicio interesante generalizarlo y ver lo que resulta.

Reflexión: En Física Clásica, ¿cómo se calculan en forma variacional las trayectorias luminosas en presencia de índice de refracción variable? Se suele invocar el llamado "Principio de Fermat" para buscar el camino más breve, de mínimo tiempo.
Podemos correlacionarlo con lo que venimos desarrollando en este estudio sobre la Relatividad.
Las partículas másicas buscan maximizar su tiempo propio 'τ', o, en forma equivalente, minimizar dt/dτ. Imaginamos el proceso en que una partícula se va "aligerando" progresivamente ($m_o \rightarrow 0$) y se asemaja cada vez más a un fotón. Sus intervalos de tiempo propio van disminuyendo hasta tender a cero en el límite $d\tau \rightarrow 0$, el cociente dt/dτ se convierte en una división por cero que pierde sentido. Sin embargo, se conserva una reminiscencia de la situación anterior porque se sigue buscando una disminución de los tiempos dt.
En el límite fotónico las restricciones y las condiciones de contorno deben cambiar. No se trata de ir de un evento (t_o,x_o,y_o,z_o) hacia otro (t_1,x_1,y_1,z_1); lo que se busca es ir de un evento (t_o,x_o,y_o,z_o) hasta un lugar (x_1,y_1,z_1), circulando por la trayectoria que minimize la suma de los 'dt', es decir, el tiempo total.

6.6.2 Análisis Doppler por métrica:

La dilatación temporal indica que la diferencia de tiempos propios entre el punto más bajo y el punto más alto de la nave se corresponde con el factor X_H/X_0. Operando un poco llegamos a:

$$X_H/X_0 = X_H/(X_H-H)$$
$$= 1/(1-H/X_H)$$
$$\approx 1+H/X_H$$
$$\approx 1+H.A_o/c^2$$

Invitación a reflexionar: Queda el mismo factor que aparece en la alteración de frecuencia por Efecto Doppler Gravitatorio, lo que nos lleva a pensar que no debe ser casualidad y que debe haber una posible interpretación. Una onda electromagnética viajando en dirección-X involucra funciones armónicas de la forma $e^{j(\omega T-k.X)}$, con velocidad de propagación $\omega/k=u_c=c.X/X_H$. Entonces es esperable que la posición dentro del campo gravitatorio altere la frecuencia, la longitud de onda o ambas magnitudes.

6.6.3 Dilatación temporal:

Nos estamos acercando a una zona de ruptura, donde aparecen fenómenos que no tienen sostén en conceptos de la Física anteriores a la Relatividad General. Esta afectación del tiempo es uno de tales fenómenos.

Las coordenadas de Rindler presentan: $(d\tau)^2 = (X/X_H)^2(dT)^2 - 1/c^2.[(dX)^2+(dY)^2+(dZ)^2]$
Según estas fórmulas habría una diferencia entre tiempo propio τ y tiempo coordenado T *incluso para objetos en reposo*. Aunque la deducción se hizo para un sistema acelerado, el mismo efecto sería esperable para campos gravitatorios en virtud del Principio de Equivalencia.

Cuando un objeto se mueve, la dilatación temporal total sería una combinación de efectos cinemáticos (estudiados en Relatividad Especial) y efectos gravitacionales (que corresponden a Relatividad General).

Tecnología actual: Comentamos que este detalle se tuvo en cuenta en el diseño del sistema GPS de Posicionamiento Global. Los relojes atómicos de alta precisión, al ser puestos en órbita dentro de los satélites, miden el tiempo en forma diferente que sobre la superficie de la Tierra. Si no se ejecutaran las correcciones relativistas, esta diferencia de tiempos comprometería el servicio de localización.
La métrica de Rindler, bajo la aproximación de distancias $H \ll X_H$, adquiere la forma simplificada de:

$(d\tau)^2 \approx (dT)^2.(1+2.u_{pot}/c^2) - 1/c^2.(dEP)^2$

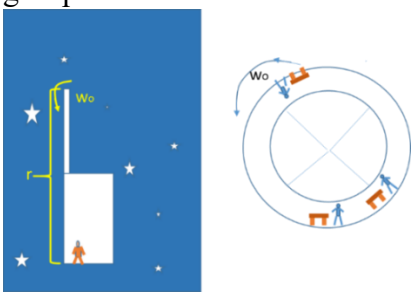
dEP = distancia espacial según la métrica de Euclídes (Pitágoras)

u_{pot} = potencial gravitatorio por unidad de masa (-M.G/r si fuera en la cercanía de la Tierra)

Actividad propuesta: Averiguar la masa de la Tierra 'M_T' y el radio 'r' de las órbitas GPS. Demostrar que el error al cabo de un día sería del orden de 25μs a 50μs si no se corrigieran los relojes por Relatividad. ¿Cuánto recorrre la luz en ese tiempo?

6.6.4 Estación espacial rotatoria:

Vamos a reforzar las ideas métricas en este nuevo escenario. La estación espacial rotatoria es un recurso para intentar contrarrestar las incomodidades que la ingravidez produce sobre el organismo humano.
Los astronautas a bordo experimentan una gravedad artificial ≈g si se ubican a una distancia 'r' del centro de giro para la cual la fuerza centrífuga $m.r.w_o^2$ coincide con el peso m.g que tendrían en la Tierra.



En la fuente consultada (https://es.wikipedia.org/wiki/Toro_de_Stanford) se describe una propuesta de implementación basada en un anillo toroidal de diámetro 1790 metros girando a 1 revolución por minuto.

Suponiendo que estamos lejos de fuentes gravitatorias significativas, la métrica en el referencial planetario Σ es la de Relatividad Especial: $(d\tau)^2 = (dt)^2 - 1/c^2.(dEP)^2$, siendo $(dEP)^2 = dx^2+dy^2+dz^2$
Cada métrica tiene asociado un Lagrangeano, en este caso:

$\mathcal{L}(ct,x,y,z,c\dot{t},\dot{x},\dot{y},\dot{z},\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2}$ $\qquad \sqrt{\ }=1$

Para el escenario aquí descrito es conveniente cambiar las coordenadas rectangulares (x,y,z) por las cilíndricas (r,φ,z), donde 'r' es la distancia al centro de giro y 'φ' es el ángulo medido en el plano de giro. La 3ra coordenada 'z' no se usaría, se mantendría constante en todos los experimentos.
Ejercicio: A partir de $x=r.\cos\varphi$, $y=r.\mathrm{sen}\varphi \rightarrow$ calcular dx, dy, dx^2+dy^2.

La parte espacial de la métrica es: $(dEP)^2 = (dr)^2 + r^2.(d\varphi)^2 + (dz)^2$, que sustituida en dτ da lugar a:
$(d\tau)^2 = (dt)^2 - 1/c^2.[(dr)^2 + r^2.(d\varphi)^2 + (dz)^2]$
El mismo cambio de variables se aplica a las velocidades propias del Lagrangeano $\dot{r}=dr/d\tau$, $\dot{\varphi}=d\varphi/d\tau$.

$\mathcal{L}(ct,r,\varphi,z,c\dot{t},\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z},\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)/c^2}$ $\qquad \sqrt{\ }=1$

Comenzamos haciendo un balance de fuerzas, tratando de llegar a los mismos resultados clásicos pero ahora dentro del formalismo lagrangeano (que vamos a utilizar mucho en este trabajo y que consideramos necesario entrenar).
El momento radial es $P_r=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}$

$P_r=-m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).(-2.\dot{r}/c^2)$ $\qquad \rightarrow\sqrt{\ }=1$ por norma, por construcción

$P_r=m_o.\dot{r}$

$dP_r/d\tau=m_o.\ddot{r}$

La "fuerza" gravitatoria (entre comillas porque es ficticia) vale:

$$\partial \mathcal{L}/\partial r = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).(-2.r\,\dot{\varphi}^2/c^2)$$

$$\partial \mathcal{L}/\partial r = m_o.r\dot{\varphi}^2$$

La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada 'r' dice:

$$dP_r/d\tau - \partial \mathcal{L}/\partial r = F_r$$

$$m_o.\ddot{r} - m_o.r\dot{\varphi}^2 = F_r$$

Para un habitante de la estación que mantiene $\dot{\varphi}=w_o$, r=const, $\dot{r}=0$, $\ddot{r}=0$, F_r es la fuerza centrípeta que lo fuerza a describir un movimiento circular uniforme (vista en el referencial Σ). Es negativa porque está dirigida hacia el eje de giro, y proviene del contacto con la estructura de la estación. Si el habitante está "parado", es el "piso" de la estación el que produce este empuje.
Podemos pasar el término "$\partial \mathcal{L}/\partial r$" hacia el lado derecho, hacia el lado de las fuerzas. La matemática no cambia pero sí cambia la interpretación física, el punto de vista.

$$m_o.\ddot{r} = m_o.r\dot{\varphi}^2 + F_r$$

Ahora estamos acompañando el punto de vista del pasajero o tripulante de la estación.
Del lado derecho tiene una "fuerza centrífuga" $m_o.r\dot{\varphi}^2$, que tiende a alejarlo hacia radios mayores y que es percibido como una "*caída*" gravitatoria. Es balanceada por el apoyo del piso F_r que evita la "*caída*".

Para acompañar en forma más efectiva a este viajero, hacemos un cambio de variable para situarnos en un referencial Σ' que gira solidario junto con la estación. Estamos en camino de generalizar la Teoría de la Relavidad pasando a sistemas de referencia no-inerciales, continuando la idea de las coordenadas Rindler.

t=t' $\quad\varphi=\varphi'+w_o.t'$ $\quad w_o$=velocidad angular

$$(d\tau)^2 = (dt')^2 - 1/c^2.\,[(dr)^2 + r^2.(d\varphi)^2 + (dz)^2]$$

$$(d\tau)^2 = (dt')^2 - 1/c^2.\,[(dr)^2 + r^2.(d\varphi'^2 + 2.w_o.d\varphi'.dt' + w_o^2.dt'^2) + (dz)^2] \quad \rightarrow \text{agrupamos}$$

$$(d\tau)^2 = [\mathbf{1 - r^2.w_o^2.c^2}](dt')^2 - 1/c^2.\,[(dr)^2 + r^2.(d\varphi')^2 + (dz)^2] \mathbf{- 2.w_o.d\varphi'.dt'/c^2}$$

Llama la atención un nuevo efecto que no se observaba en las coordenadas Rindler: aparece en la métrica un término *mixto* o *cruzado* que involucra al producto de diferenciales espaciales con temporales **dφ'.dt'** y que se asocia a la llamada "fuerza de Coriolis". En el capítulo 7 veremos que en presencia de gravedad la métrica del espacio-tiempo también puede aparecer perturbada en sus términos mixtos. En algunos casos esto repercute en una "fuerza gravitomagnética" equivalente a la de Coriolis, que actúa solo cuando la partícula se mueve; en otras ocasiones el término mixto funciona como un término "salvador" que evita una anulación o cambio de signo en el determinante del tensor métrico (sección 7.2.4).

En esta primera excursión a la estación espacial es altamente recomendable que nos *quedemos quietos*. ☺
Desde el punto de vista físico, para evitar marearnos por las fuerzas de Coriolis que sufriríamos si nos comenzáramos a mover.
Desde el punto de vista mental, aun tratándose de experimentos mentales y no físicos, de cualquier manera consideramos recomendable quedarnos quietos para evitar complicaciones matemáticas. Ya habrá ocasión más adelante para profundizar el estudio de sistemas rotatorios.

Mantenernos quietos en la estación implica dejarnos llevar por el giro a velocidad angular constante $\varphi=w_o.t$.
Es decir, estudiamos inicialmente el escenario simplificado de $d\varphi=w_o.dt$ y $d\varphi'=0$.

$$(d\tau)^2 = (dt')^2\,[\mathbf{1 - r^2.w_o^2/c^2}] - 1/c^2.\,[(dr)^2 + (dz)^2]$$

La parte temporal de la métrica presenta una distorsión con factor $\mathbf{1 - r^2.w_o^2/c^2}$, que podemos comprobar que responde al mismo formato $\mathbf{1+2.u_{pot}/c^2}$ que nos apareció otras veces en este capítulo 6.
Razonando por Física Clásica, la fuerza centrífuga es $\vec{F_{cfug}} = m.r.w_o^2\,(\vec{e_r})$
El versor $\vec{e_r}$ indica la dirección y su signo positivo indica sentido saliente.
Esta fuerza deriva de un potencial centrífugo, $\vec{F_{cfug}} = -m.\nabla u_{cfug}(r)$, siendo $u_{cfug} = -\frac{1}{2}\, r^2.w_o^2$

Entonces $2.u_{cfug}/c^2 = -r^2.w_o^2/c^2$, que es lo que aparece en la perturbación métrica temporal.
En el referencial Σ' en donde se experimenta la gravedad simulada por fuerza centrífuga, mediríamos una *misteriosa* dilatación temporal que solo podríamos atribuirla a la gravedad.
Según la descripción en el sistema Σ, esta dilatación temporal no es para nada misteriosa y tiene un origen cinemático descrito por las fórmulas de Lorentz de la Relatividad Especial:

- El *piso* de la estación gira con radio $r=R_o+H$, velocidad absoluta $u=(R_o+H).w_o$
- El *techo* de la estación gira con radio $r= R_o$, velocidad absoluta $u=R_o.w_o$
- En cada caso hay un factor gamma diferente $\gamma_u=1/\sqrt{1-u^2/c^2}$
- El piso experimenta mayor dilatación temporal que el techo debido a su mayor velocidad.

6.6.5 Propuesta métrica:

En la sección 5.5 introdujimos la hipótesis tentativa de agregar al Lagrangeano relativista un término de energía potencial de signo contrario a la cinética, para alinearnos en el límite de los campos bajos con el Lagrangeano clásico "$E_{cin}–U_{pot}$".
La hipótesis resultó satisfactoria para los escenarios electromagnéticos del capítulo 5, y en este capítulo 6 nos reencontramos con la misma estructura para sistemas acelerados. Con una diferencia: *ahora los potenciales aparecen en la métrica expandida, lo que implica que se ubicarían dentro de la raíz en el Lagrangeano y afectarían a todas las partículas, no solo a las que tienen carga eléctrica*:

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2\sqrt{[1+2u_{pot}(x,y,z)/c^2].(\dot{t})^2 - 1/c^2.[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2]}$$

En virtud del Principio de Equivalencia, extendemos la propuesta métrica para escenarios gravitatorios:

$$(dS)^2 = -[1+2.u_{pot}/c^2].(c.dt)^2 + (dx^2+dy^2+dz^2)$$

u_{pot} es el potencial gravitatorio por unidad de masa que actúa sobre toda partícula material (¡y también sobre la luz!). Nos proponemos explicar todos los fenómenos nuevos: fuerza gravitatoria, curvatura de la luz, efecto Doppler y dilatación temporal, a través de la distorsión métrica causada por este potencial u_{pot}.
Comenzamos por las fuerzas, realizando un balance de fuerzas para cada una de las coordenadas x,y,z. Alcanza con elegir una de las direcciones, ya que las restantes siguen la misma estructura.

Momento en x: $P_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).(-2.\dot{x}/c^2) = m_o.\dot{x}$
Fuerza gravitatoria en x: $\partial\mathcal{L}/\partial x = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).\partial u_{pot}/\partial x.(2/c^2).\dot{t}^2 = -m_o.\dot{t}^2.\partial u_{pot}/\partial x$
Otras fuerzas de origen no-gravitatorio: F_x

Ecuación de Euler-Lagrange:

$dP_x/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial x + F_x$ →sustituimos lo recién calculado
$dP_x/d\tau = -m_o.\dot{t}^2.\partial u_{pot}/\partial x + F_x$
$dP_x/d\tau = -m_o.\dot{t}^2.\partial u_{pot}/\partial x + F_x$

Quitamos un factor $\gamma_u=\dot{t}$ observando que:
$d/d\tau = \dot{t}.d/dt$ = relación entre derivadas, respecto al tiempo propio y al tiempo coordenado
$F_x = \dot{t}.f_x$= relación entre la fuerza clásica (minúscula) y la fuerza relativista (mayúscula)

$dP_x/dt = -m_o.\dot{t}.\partial u_{pot}/\partial x + f_x$ → reconocemos la masa relativista $m=m_o.\dot{t}$

$$dP_x/dt = -m.\partial u_{pot}/\partial x + f_x$$

De acuerdo con los desarrollos realizados hasta el momento actual esta ecuación podría parecer una generalización razonable de la Relatividad Especial. El único reparo que podríamos adelantar sería la presencia de la "masa relativista". Ya advertimos en el capítulo 5 que el verdadero invariante relativista, en el que concuerdan todos los sistemas de referencia y en el que deberían basarse las formulaciones de las leyes físicas, es la masa propia o masa en reposo m_o.
Pronto iremos observando nuevos aspectos objetables que exigen correcciones a esta propuesta métrica.

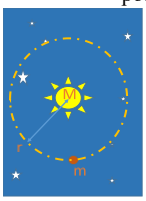
6.7 Gravedad planetaria.

En esta sección veremos situaciones interesantes que surgen de aplicar estos conceptos métricos al espacio estelar y planetario. ¿Porqué debemos irnos tan lejos? Porque es a esa escala donde la fuerza gravitatoria es la dominante; aquí en la Tierra se ve opacada por otras fuerzas de origen electromagnético o mecánico, y a nivel atómico microscópico predominan las fuerzas nucleares.

Los potenciales gravitatorios planetarios adquieren la forma de $u_{pot}(r) = -M.G/r$ para $r>R_a$

M = masa del planeta o estrella que genera gravedad a su alrededor. (*En cada región nos concentramos en el astro dominante, ignorando los efectos gravitatorios de astros vecinos*).
m = masa de prueba ($m \ll M$), que experimenta la gravedad existente en su región
R_a = radio del objeto masivo, que se supone de forma esférica para simplificar los cálculos
r = distancia al centro del objeto masivo
θ, φ = coordenadas esféricas que acompañan a 'r' y completan la descripción
G = constante de Newton de la *gravitación universal*

De este $u_{pot}(r)$ se deriva la fuerza gravitatoria $\vec{F_g} = -m.\nabla u_{pot}(r) = -G.m.M/r^2\ \vec{e_r}$



6.7.1 Perihelio de las órbitas planetarias:

La métrica planetaria, sustituyendo $u_{pot}= -M.G/r$ en $(1+2.u_{pot}/c^2)$, adquiere la forma:

$$(d\tau)^2 = [1 - 2.M.G/(r.c^2)].(dt)^2 - 1/c^2.\ [\ (dr)^2 + r^2.(d\theta)^2 + r^2.sen^2\theta\ (d\varphi)^2\ ] \quad \text{Ecuación 6.7}$$

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2\sqrt{\ [1 - 2.M.G/(r.c^2)].(\dot{t})^2 - 1/c^2.\ [\ (\dot{r})^2 + r^2.(\theta^{\cdot})^2 + r^2.sen^2\theta\ (\dot{\varphi})^2\ ]}$$

El factor $2.M.G/c^2$ tiene unidades de distancia, le ponemos nombre $r_S=2.M.G/c^2$. En la siguiente sección también le pondremos *apellido*: Schwarzschild.
Para evaluar la validez de esta propuesta, comparamos las Leyes de Keppler clásicas con el resultado de la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Comenzamos el análisis de una órbita circular, en los casos particulares en que $\theta=\pi/2$ constante, $\theta^{\cdot} = 0$.

Momento angular:

$P_\varphi = \partial\mathcal{L}/\partial\varphi^{\cdot} = m_o.r^2.\varphi^{\cdot} = L$ cte. ¿Por qué constante?

La ecuación de Euler-Lagrange dice $dP_\varphi/d\tau=\partial\mathcal{L}/\partial\varphi$, que es nulo por la simetría esférica.

Lo que implica que $dP_\varphi/d\tau=0$ y se conserva el momento angular P_φ

Por cada coordenada que no presenta dependencia en el Lagrangeano tenemos una ley de conservación.

Momento temporal:

$P_o = \partial\mathcal{L}/\partial(ct^{\cdot}) = 1/c.\partial\mathcal{L}/\partial(t^{\cdot}) = -m_o.c/(2\sqrt{\ })(1-r_S/r).2t^{\cdot} = -m_o.(1-r_S/r).ct^{\cdot}$.

También debe ser constante, porque el Lagrangeano no depende explícitamente del tiempo $\partial\mathcal{L}/\partial t=0$.

La constante debe ser la energía escalada $P_o = -E/c$, el componente temporal del cuadrimomento.
Con signo negativo por el carácter covariante.

Ecuación radial:

$P_r = \partial\mathcal{L}/\partial r^{\cdot} = m_o.r^{\cdot}$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).(\ 2MG/(r^2c^2).\dot{t}^2 - 2.r.\varphi^{\cdot 2}/c^2)$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = -m_o.(\ MG/r^2.\dot{t}^2 - r.\varphi^{\cdot 2})$

Las órbitas circulares corresponden a $r^{\cdot} = 0$, $r^{\cdot\cdot} = 0$, es decir, $\partial\mathcal{L}/\partial r=0$.

$m_o.(MG/r^2.\dot{t}^2 – r.\dot{\varphi}^2) = 0$

$MG/r^2.\dot{t}^2 = r.\dot{\varphi}^2$

$MG/r^3 = \dot{\varphi}^2/\dot{t}^2$

Si r=cte y el momento angular también es constante, esto significa $\dot{\varphi} = cte$ y $\dot{t} = cte$

$\dot{\varphi} = w_o.\dot{t}$

$MG/r^3 = w_o^2$

Llegamos exactamente a la 3ra Ley de Keppler clásica, que afirma que el cuadrado del período de revolución es proporcional al cubo del radio.
La única sutileza es $\dot{t} \neq 1$, el planeta al orbitar sufre una cierta dilatación temporal por causa de su velocidad orbital y también por la proximidad al Sol.

Ejercicio: Realizar los cálculos completos para órbitas genéricas no circulares (solución en el capítulo 15). Aquí presentamos solo los resultados más relevantes.

- Energía conservada: $E=m_o.c^2.\dot{t}.(1-r_S/r)$
- Momento angular conservado: $L= m_o.r^2.\dot{\varphi}$
- Fuerza radial: $\partial\mathcal{L}/\partial r= –MG/r^2. [E/(m_oc^2)]^2/(1-r_S/r)^2 + L^2/(m_o^2.2r^3)$
- Ecuación radial: $m_o.\ddot{r} = \partial\mathcal{L}/\partial r$
- Cambio de Binet $r(\tau)=1/u(\varphi)$: $u''(\varphi) + u(\varphi) = MG.[E/(Lc^2)]^2/(1-u.r_S)^2$
- Condición inicial en $\tau=0$: $\varphi=0$, $r=r_o$, $\dot{r}=0$, $v_o=r_o.\dot{\varphi}$
- $u''(\varphi) + u(\varphi) = MG/(r_o.v_o)^2/(1-u.r_S)^2$

En el límite de las bajas energías $r_S \ll r$ →podemos aproximar $\dot{t}\approx 1$, $E\approx m_oc^2$, $(1-r_S/r)\approx 1$ y nos reencontramos con las mismas órbitas cónicas (elipse, parábola, hipérbola) predichas por las leyes clásicas de Keppler.

Una mejor aproximación relativista consiste en aplicar un desarrollo de Taylor $1/(1-u.r_S)^2\approx 1+2.u.r_S$
La ecuación diferencial queda:

$u''(\varphi) + u(\varphi) = MG/(r_o.v_o)^2.(1+2.u.r_S)$

Para excentricidades leves → $MG/(r_o.v_o)^2\approx 1/r_m$, siendo r_m=radio medio de la órbita

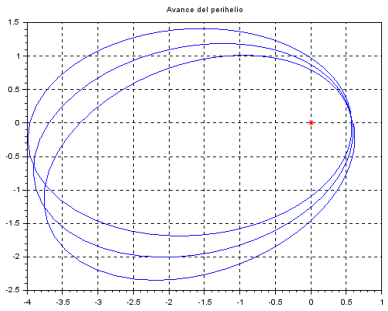
$u''(\varphi) + u(\varphi) = 1/r_m.(1+2.u.r_S)$

$u''(\varphi) + u(\varphi).[1–2.r_S/r_m] = 1/r_m$

$u''(\varphi) + W^2.u(\varphi)= cte$

La solución homogénea es la de un oscilador seno-coseno, pero su frecuencia es $W\neq 1$. Las funciones $\cos(W\varphi)$ con $W\neq 1$ no son univaluadas en φ: no tienen período 2π y no repiten el mismo valor al cabo de un ciclo completo. Este fenómeno se llama "precesión del perihelio"; la curva descrita no es una elipse exacta y su perihelio va ubicándose en un sitio diferente luego de cada revolución.

El efecto es más pronunciado para el planeta Mercurio, que al ser el más próximo al Sol tiene más marcada la diferencia $(1–r_S/r)\neq 1$. La siguiente figura (no está a escala) ilustra la variación del perihelio con cada revolución.



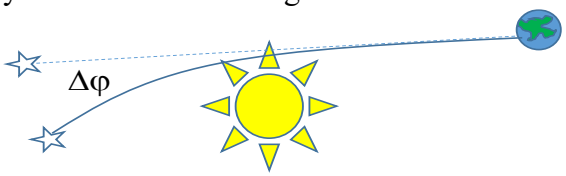
Aclaración: Cuando un satélite orbita alrededor de la Tierra, se llama *apogeo* al punto más alto de su órbita y *perigeo* el punto más bajo. Cuando se trata de planetas orbitando alrededor del Sol, los puntos vértices de la órbita elíptica se llaman *afelio* y *perihelio*. Los nombres están inspirados en el idioma griego donde Helios=Sol y Geo=Tierra.

Historia: El avance del perihelio de Mercurio era conocido por los astrónomos desde tiempo atrás, y un porcentaje alto de ese fenómeno se podía explicar por la gravedad de planetas vecinos, aplicando la física conocida de Newton. Salvo unos ~43 arcosegundos por siglo que quedaban sin resolver; la explicación a la que llegó la comunidad científica es que la fuerza gravitatoria *no podía seguir una ley de $1/r^2$ exactamente, debían ser necesarios ajustes correctores*.
Cuando en 1915 se publicó por primera vez la Teoría de la Relatividad General, se presentó un modelo que concordaba en forma muy precisa con las desviaciones observadas para el planeta Mercurio.
Problema: Aquí debemos observar una primera objeción a nuestra propuesta métrica, y es que nuestro modelo con $\cos(W\varphi)$ y $W^2 \approx 1 - 2.r_S/r_m$ predice un desvío angular de 28 arcosegundos por siglo, no llega a los 43 arcsec que debería. Vamos bien rumbeados :) , pero nos falta ajustar los modelos. En capítulos siguientes veremos que la perturbación temporal de la métrica (factor $1-r_S/r$) no alcanza para describir esta precesión anómala; son necesarias correcciones adicionales que involucran la incorporación de *perturbaciones espaciales* en la fórmula métrica 6.7.

Actividad sugerida: Buscar información sobre la masa del Sol y la distancia media a Mercurio, para confirmar que nuestra estimación actual de desvío corresponde a ~28 arcsec/siglo.

6.7.2 Posición aparente de estrellas remotas:

La figura muestra, fuera de escala, lo que puede ocurrir con la luz de una estrella que pasa muy cerca del Sol y se curva antes de llegarnos a la Tierra.



Si ignoramos este efecto de curvatura, desde nuestros observatorios prolongaríamos en línea recta el rayo de luz recibido (dibujado en línea punteada) y deduciríamos una ubicación de la estrella que no es la correcta.

El ángulo de deflexión lo podemos calcular basándonos en la Física de Newton y agregándole algunos conceptos relativistas presentados hasta el momento en este trabajo.

$\epsilon = R.v_o^2/(MG) - 1$	excentridad de la hipérbola, calculada en el ejercicio 6.7.1
$v_o = c$	corresponde a fotones moviéndose a la velocidad de la luz
R	Radio del Sol
M	Masa del Sol
$\text{sen}(\Delta\varphi/2) = 1/\epsilon$	
$\Delta\varphi =$	ángulo entre las asíntotas de la hipérbola

Hipótesis: $MG/R \ll c^2$ permite aproximar $\text{sen}(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi$

→El resultado da $\Delta\varphi \approx 0.87$ arcosegundos

(*es muy chico ya que 1 grado sexagesimal tiene 60 minutos y cada minuto tiene 60 segundos de arco*)

Corrección: El valor que predice la Teoría de la Relatividad General es de $\Delta\varphi \approx 1.75$ arcosegundos.
Da el doble de lo que obtuvimos basándonos en el modelo clásico de Newton, la Relatividad Especial y el Principio de Equivalencia, y esto representa una segunda objeción a la propuesta métrica de 6.6.5. Para poder entender la diferencia debemos seguir avanzando en la Teoría, por lo pronto adelantamos parte de la explicación: nuestra deflexión (mitad) se debe a que solo consideramos la curvatura temporal, la causada por la distorsión métrica temporal. Está faltando considerar la distorsión espacial de la métrica, que aporta una *fuerza dependiente de la velocidad* escalada como v^2/c^2. En el límite $v \to c$ (para proyectiles fotónicos), esta fuerza contribuye igual que la fuerza clásica y da como resultado una deflexión angular doble.

La Teoría General de la Relatividad, tal como fue publicada en 1915, sí contemplaba esta fuerza variable según la velocidad y era consistente con la medida experimental. En relación con la sección 6.7.1, debemos comentar que esta misma fuerza contribuye a cuantificar en forma satisfactoria el avance del perihelio orbital.

Historia: En condiciones normales no es viable realizar ningún tipo de experimento astronómico apuntando los telescopios hacia el Sol, porque su luz es varios órdenes de magnitud superior a la de las estrellas que se quiere estudiar; es necesario esperar a los eclipses de Sol.
La Relatividad General se publicó en 1915, durante la Primera Guerra Mundial.
En mayo de 1919, con la guerra finalizada, surgió la primera ocasión para poner a prueba las predicciones de esta nueva teoría. Fuente=https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_eclipse_of_May_29,_1919
El resultado obtenido concordaba mejor con la hipótesis de los 1.75 arcosegundos que con el modelo newtoniano de 0.87 arcosegundos, y se consideró un éxito para validar la Relatividad General.

Órbitas fotónicas o luminosas:
Podemos hacer un análisis precario para obtener algún indicio de porqué está mal nuestra fórmula actual de deflexión. En la sección 6.7.2 calculábamos órbitas circulares y enunciábamos: "*La única sutileza es $t\dot{}\neq 1$, el planeta al orbitar sufre una cierta dilatación temporal …etc*". Si en lugar de planetas ponemos a orbitar un fotón, no estaríamos frente a una diferencia *sutil* sino enorme porque para los fotones $t\dot{}\to\infty$.
El Lagrangeano vale $\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{\ }$, con la característica de que el factor raíz se mantiene unitario $\sqrt{\ }=1$.
El $t\dot{}$ orbital se despeja de esa condición:

$t\dot{}^2.(1-2MG/rc^2 - r^2.\varphi\dot{}^2/c^2) = 1$ → $\varphi\dot{}=w_o.t\dot{}$
$t\dot{}^2.(1-2MG/rc^2 - r^2.w_o^2/c^2) = 1$ →equilibrio orbital $r.w_o^2=MG/r^2$
$t\dot{}^2.(1-2MG/rc^2 - MG/rc^2) = 1$
$t\dot{}^2.(1-3MG/rc^2)= 1$

En el límite $r\to 3MG/c^2$ estamos frente a una órbita fotónica o luminosa porque $\dot{t}$ diverge (su masa propia m_o debería acompañar el límite tendiendo a cero para que los momentos lagrangeanos no diverjan).
El radio de curvatura es ese valor de 'r': **$R_c=r$**.
Sin embargo, las aproximaciones clásicas al radio de curvatura dan según las fórmulas 6.2 $R_c=c^2/|g|$, siendo $|g|$ la aceleración gravitatoria local que en este caso vale MG/r^2.
A un rayo de luz que circule con esa coordenada $r=3MG/c^2$ radial le correspondería una deflexión con radio de curvatura $R_c= c^2r^2/MG = c^2[9.M^2G^2/c^4]/MG=9MG/c^2=3r$ → **$R_c=3r$** ¡el triple!
→ Cuando un modelo predice dos resultados tan diferentes según qué enfoque se utilice, es señal de que el modelo está incompleto. Lo más que podemos afirmar por el momento es que "*la luz se curva más de lo que parecía en un primer análisis semi-clásico*". Al avanzar iremos convergiendo a mayores acuerdos entre los distintos resultados. Otro concepto que deberemos tener presente es tomar con cautela y/o desconfianza los resultados que surjan de extrapolar ideas clásicas hacia regiones donde la métrica está muy perturbada.

6.7.3 Velocidad de escape en un campo gravitatorio:

Cuando se estudia el movimiento planetario según las leyes de Newton y Keppler, es común definir una velocidad v_{esc} que depende del radio 'r' en que nos encontramos ubicados.
Llamamos 'M' al cuerpo creador de la gravedad (masa *grande*) y 'm' al cuerpo que la experimenta (masa *chica*). Siendo 'u' el valor absoluto de la velocidad de la masa 'm', se cumple:

- Si $u<v_{esc}$ el objeto 'm' no puede escapar a la atracción gravitatoria. O bien colapsa (cae) hacia el centro de atracción, o bien se estabiliza en una órbita elíptica. Nunca llega a $r=\infty$.
- Si $u=v_{esc}$ el cuerpo 'm' pasa cerca de 'M' y luego se aleja indefinidamente en una órbita parabólica, alcanzando el infinito con velocidad nula.
- Si $u>v_{esc}$ el objeto escapa efectivamente de la atracción gravitatoria describiendo una órbita hiperbólica, llega a $r=\infty$ con una velocidad asintótica estrictamente mayor que cero.

(*Observación: cuando solo hay movimiento radial, las curvas degeneran en una recta; esto es un detalle menor que no cambia los conceptos que queremos ilustrar*)

Un balance energético clásico da:

$E_{tot} = E_{cin} + U_{pot}$ (Energía total = cinética + potencial)

$E_{tot} = ½\ m.u^2 - m.M.G/r$

La condición de escape es que la energía sea suficiente para alcanzar el infinito ($r=\infty$ $U_{pot}=0$) con $u^2>0$.

$E_{tot} > 0$

$½\ m.u^2 - m.M.G/r > 0$

$u^2 > 2.M.G/r$

$u^2>v_{esc}^2$ → $v_{esc}^2= 2.M.G/r$

Observar la fórmula 6.7.1 $\epsilon=R.v_o^2/(MG)-1$: si sustituimos $v_o=v_{esc}$ nos da excentricidad $\epsilon=1$ (parábola).

Por otro lado, la Relatividad Especial predice que la velocidad de la luz 'c' es la velocidad límite que pueden alcanzar los cuerpos físicos. Si para un cierto radio 'r' se da que el requerimiento de escape es una $v_{esc}\geq c$, *el objeto ya no podrá escapar de la atracción gravitatoria*.
De hecho, ni siquiera la luz podría escapar de una región con estas caracterísicas y se crearía una **zona oscura** invisible desde el exterior. Una región que guarda un parecido con el escenario descrito en la nave acelerada de Rindler de 6.4.5 (otra manifestación de la equivalencia entre aceleración y gravedad).

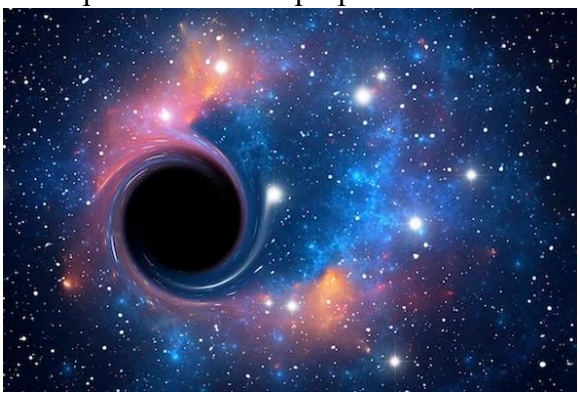
¿Cuándo se cumple la condición de imposibilidad de escape $v_{esc}^2>c^2$?
Cuando $2.M.G/r > c^2$, que podemos reordenar y expresar como $r<2.M.G/c^2$ o **$r<r_S$**.
Se define como Radio de Schwarzschild a la cantidad $r_S=2.M.G/c^2$. La misma cantidad r_S que aparece en la perturbación métrica temporal $(1-r_S/r)$ adquiere aquí una posible interpretación física.
La cáscara esférica $r=r_S$ marca el horizonte entre el exterior y el interior de la región que en estos contextos se conoce como agujero negro; para que el análisis de escape tenga sentido esta cáscara debe caer fuera de la región ocupada por la masa 'M', debe ser $r_S>R_a$.

Resumiendo:

- Si $r_S<R_a$ Masa chica, radio grande → no hay agujero negro (figura izquierda).
- Si $r_S>R_a$ Masa grande concentrada en radio chico. ¡Hay agujero negro! Deben distinguirse dos regiones:
  - → $r>r_S$ región exterior del agujero negro.
    Velocidad de escape $v_{esc}<c$, el escape es posible.
    Vale la Física Clásica conocida, con eventuales ajustes relativistas.
  - →$r<r_S$ región interior del agujero negro.
    Velocidad de escape $v_{esc}>c$, el escape no es posible.
    Ni siquiera la luz puede escapar de esta región.

6.7.4 Agujeros negros:

Su nombre está inspirado en la idea de que nada puede escapar a su atracción gravitatoria, ni siquiera la luz. Al no poder emitir luz propia ni devolver la luz incidente, se verían como negros desde afuera.



https://blogs.scientificamerican.com/observations/living-near-a-supermassive-black-hole/

Miremos más en detalle la métrica planetaria propuesta por la ecuación 6.7:

$$(d\tau)^2 = [1 - 2.M.G/(r.c^2)].(dt)^2 - 1/c^2.\ [\ (dr)^2 + r^2.(d\theta)^2 + r^2.sen^2\theta\ (d\varphi)^2\ ]$$

El potencial $u_{pot} = -M.G/r$ con su signo negativo predice fenómenos muy extraños si el corchete marcado en rojo tiende a 0 o cambia de signo.

- A medida que nos acercamos desde afuera a un cierto valor crítico $r \rightarrow r_S$, el factor de dilatación temporal y de corrimiento Doppler crece y tiende a infinito.
- El radio crítico que marca el límite es el ya definido radio de Schwarzschild $r_S = 2.M.G/c^2$.
- Si se cruza hacia la región $r<r_S$, el corchete queda negativo y ciertas cantidades reales pasan a ser complejas, lo que dificulta su interpretación física. No se trata solo de una imposibilidad de escape como se sugería en la sección anterior 6.7.3, lo que tenemos es algo más fuerte: una forma cuadrática con todos los cuadrados restando y contribuyendo a un tiempo propio complejo $d\tau^2<0$.

Ejercicio: calcular r_S para el caso de la Tierra y para el caso del Sol.

El resultado revela valores de r_S muy chicos, mucho menores al radio físico del objeto masivo creador de la gravedad. El potencial $u_{pot}(r)$ y la métrica $d\tau^2$ solo son válidas para $r>R_a$ y parecería que no debemos preocuparnos porque la condición $r=r_S$ se alcanza dentro de la zona ocupada por el astro. Sin embargo, hay observaciones astronómicas que sugieren la existencia de objetos muy masivos con la masa concentrada en una región R_a muy chica. Para esos "agujeros negros" se cumple $r_S>R_a$, lo que significa que la igualdad $r=r_S$ se alcanzaría en el vacío exterior al objeto, y ese vacío forma parte de las regiones que deben ser modeladas.

6.7.5 Horizonte de sucesos y cono de luz:

La métrica planetaria sugerida por las deducciones de las secciones 6.1 a 6.6 tiene esta forma:

$$d\tau = \sqrt{(1 + 2.u_{pot}/c^2).(cdt)^2 - (dEP)^2}$$

Las partículas materiales están limitadas a moverse con una velocidad menor a la de la luz para mantener no negativo el radicando y así asegurar un '$d\tau$' real.

La forma en que la gravedad afecta a las ondas luminosas marca que la velocidad coordenada de la luz 'u_c' es variable según la posición dentro del campo gravitatorio, $u_c \neq c$, y se obtiene de resolver el límite $d\tau=0$.

$$(1 + 2.u_{pot}/c^2).(cdt)^2 = (dEP)^2$$
$$(1 + 2.u_{pot}/c^2).c^2 = (dEP/dt)^2 \qquad \rightarrow u_c = dEP/dt$$
$$(1 + 2.u_{pot}/c^2).c^2 = u_c^2$$
$$u_c = c.\sqrt{1+2.u_{pot}/c^2}$$

Invitación a reflexionar: ¿No se supone que la velocidad de la luz debería valer siempre 'c'? ¿No era uno de los conceptos base de la Relatividad Especial? El problema está en la elección de las coordenadas. En este caso, a medida que bajamos en el pozo de potencial, la coordenada 't' cada vez se aparta más de lo que miden los relojes. En otro caso podría ocurrir fueran las coordenadas espaciales las que se alejen de lo que miden las reglas.

Todo está unido al hecho de que para quedarnos quietos, sin movimiento coordenado, precisamos una fuerza cada vez mayor que contrarreste a la gravedad creciente. Si nos soltamos en caída libre, dejamos de sentir la gravedad. ¡Y nuestras coordenadas también dejan de sentirla! Las coordenadas de caída libre tienen métrica de Minkowski, y una velocidad coordenada u_c=c. Lo veremos con más detalle en el capítulo 7.

Con la métrica expresada en nuestras coordenadas planetarias $d\tau = \sqrt{(1 + 2.u_{pot}/c^2).(cdt)^2 - (dEP)^2}$, la velocidad de la luz varía con la posición como $u_c = c.\sqrt{1+2.u_{pot}/c^2}$.

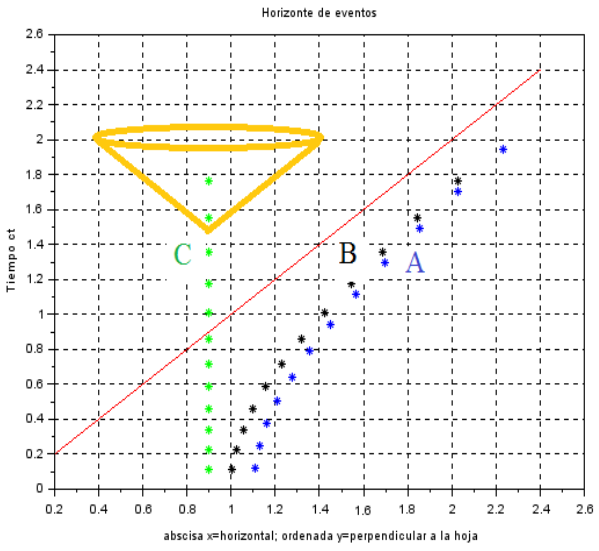
Llamamos "horizonte de sucesos" a la frontera en la cual el potencial por unidad de masa alcanza el valor $u_{pot}= -c^2/2$. De acuerdo con nuestro modelo actual de gravitación allí se anularía la velocidad de la luz.

- En el contexto de la métrica estelar planetaria, este horizonte es la frontera $r=r_S$.
- En el contexto de la nave con aceleración lineal el horizonte ocurre cuando se anula la coordenada espacial de Rindler X=0. Es el "*horizonte Rindler*" mencionado en 6.4.5.
- En el contexto de la estación espacial giratoria, ese horizonte sería el borde $r=c/w_o$.

La región *detrás del horizonte* parecería en principio una zona prohibida para las partículas, no tendrían permitido ubicarse en esas coordenadas porque $d\tau=\sqrt{(1 + 2.u_{pot}/c^2).(cdt)^2 - (dEP)^2}$ no admitiría soluciones reales para $u_{pot}< -c^2/2$, *todos los cuadrados restarían dentro del radicando*. Si miramos la métrica en su forma dS^2 todos los cuadrados sumarían; se cambiaría una propiedad importante llamada "signatura" que pasaría de (–,+,+,+) a (+,+,+,+). Tampoco habría posibilidades de existencia de luz porque la luz tendría que desplazarse con una u_c compleja.

Nuestras primeras reflexiones clásicas sobre esa región, en 6.7.3, nos daban la idea de una zona de la cual no es posible escapar. Ahora 6.7.4 parece apuntarnos a que ni siquiera es posible habitar esta región, ¿cómo podemos resolver esta aparente contradicción?
En esta sección y en capítulos próximos veremos que lo que está mal es la propuesta métrica actual, que surgió en forma apresurada luego de una aplicación incompleta del Principio de Equivalencia.
Un análisis más a fondo de los casos de gravedad artificial nos mostrará que esta prohibición de habitar no es del todo real, y una aplicación más criteriosa del Principio de Equivalencia debería conducirnos a una nueva métrica sin esta restricción. Analizaremos a continuación lo que ocurre cuando una partícula o un observador se precipita en caída libre hacia el horizonte de sucesos.

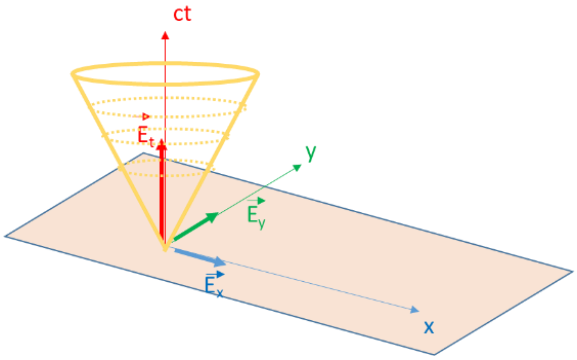
<u>Aceleración lineal</u>:
Proponemos el siguiente experimento en el cual el observador A=azul y el observador B=negro viajan en la nave espacial acelerada, y la observadora C=verde se queda quieta en su referencial Σ. Los asteriscos del diagrama espacio-tiempo muestran el "rastro" de instantes y lugares que van recorriendo.



- La línea roja es el horizonte de sucesos X=0 (X es la coordenada espacial de Rindler).
- 'A' y 'B' ven a 'C' caer en el pozo de potencial, mientras que 'C' los ve a ambos alejarse en forma acelerada. Desde el referencial Σ de 'C' no hay ninguna rareza al cruzar el horizonte de eventos.

Para un punto de la trayectoria de 'C', dibujamos en naranja el llamado "cono de luz" que se interpreta de la manera siguiente:
-Desde ese punto lanzamos rayos de luz imaginarios en dirección-x, que en la hoja impresa o pantalla de nuestra computadora se ven como rectas a +45° o –45°: $x–x_C=\pm c.(t–t_C)$ según la figura.
Hay otras dimensiones espaciales que no están contempladas en la hoja por falta de espacio, por ejemplo en la dirección-y también podríamos lanzar rayos de luz y los veríamos inclinados a ±45° como $y–y_C=\pm c.(t–t_C)$

-El lugar geométrico de todos los posibles rayos de luz con dirección en $\vec{x}$,$\vec{y}$ son las generatrices de un cono con vértice en el punto del espaciotiempo desde donde se lanzan los rayos: $(x–x_C)^2+(y–y_C)^2=c^2.(t–t_C)^2$



-La región interior del cono $t>t_C$ simboliza todos los posibles eventos futuros de los cuales podrá participar la observadora 'C'. Por ejemplo, si en algún momento cambia su decisión de caída libre y decide salir a perseguir a sus compañeros A,B, podría alcanzarlos antes de cruzar el horizonte.

Para el punto 'C' particular representado en la gráfica detrás del horizonte se aprecia que ambos compañeros 'A' y 'B' *quedan fuera de su cono de luz*. Desde el momento en que 'C' cruza el horizonte, es un *punto de no retorno* porque ya no puede alcanzar a 'A' ni a 'B'.
Tampoco puede enviarles señales luminosas o mensajes a través de ondas electromagnéticas para comunicarse con ellos y transmitirles qué se ve y se siente detrás del horizonte. A los efectos prácticos queda *desconectada causalmente* de 'A' y de 'B'. El nombre "horizonte" de eventos está inspirado en la imagen de que no podemos "ver" lo que ocurre detrás del horizonte, tal como 'A' y 'B' no ven a 'C'.

Dado que se trata de una gravedad artificial simulada por aceleración, en realidad sí existe una manera de recuperar la conexión entre 'A', 'B' y 'C': apagar los motores de la nave y abandonar la aceleración.
El Principio de Equivalencia sugiere que en situación de gravedad real podrían ocurrir fenómenos similares. En ese caso la desconexión causal parecería irreversible porque no es posible *apagar* la gravedad de un astro masivo.
Queda entonces sembrada la duda de que la región interior de un agujero negro de Schwarzschild podría contener materia (por ejemplo, ¿qué ocurrió con la materia del astro masivo que dio forma al agujero negro?). También podría permitir señales de luz entrantes al agujero, como las que A,B le envían a C; lo que no puede admitir son señales salientes. Debido a la desconexión causal no podemos comprobar con certeza estos detalles. Nos falta todavía estudiar más esta disciplina para poder extender el análisis de la gravedad hacia esas zonas.

Aceleración rotatoria:
Para un sistema giratorio como el presentado en 6.6.4 escribimos la métrica en coordenadas cilíndricas:

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - 1/c^2.\ [\ (dr)^2 + r^2.(d\varphi)^2 + (dz)^2]$$

Comenzamos aplicando un cambio de variables clásico, similar a los de Galileo pero en la coordenada angular. Luego en el capítulo 7 veremos la versión "Lorentz" de este cambio de variable:

$t=t'$ $\varphi=\varphi'+w_o.t'$ $r=r'$ $z=z'$

La métrica queda:

$(d\tau)^2 = (dt')^2 - 1/c^2.\ [\ (dr')^2 + r'^2.(d\varphi'+w_o.dt')^2 + (dz')^2]$

$(d\tau)^2 = (dt')^2 - 1/c^2.\ [\ (dr')^2 + r'^2.(d\varphi'^2 +2.w_o.d\varphi'dt' + w_o^2.dt'^2) + (dz')^2]$

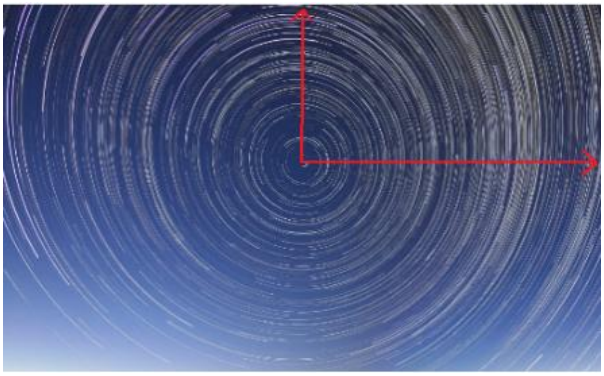
$(d\tau)^2 = (dt')^2.[1- r'^2.w_o^2/c^2] - 2.w_o.d\varphi'dt'.r'^2/c^2 - [dr'^2 + r'^2.d\varphi'^2+dz'^2]/c^2$

Las soluciones de reposo relativo a Σ' son: $dr'=0$, $d\varphi'=0$, $dz'=0$

$\rightarrow (d\tau)^2 = (dt')^2.[1- r'^2.w_o^2/c^2]$

Está claro que una partícula material no podría habitar la zona $r'>c/w_o$ porque le correspondería un '$d\tau$' complejo, en ese sentido $r=c/w_o$ parece una frontera infranqueable similar a las ya descritas.

Sin embargo, en el referencial solidario a la estación vemos que todo el Universo (planetas, estrellas, galaxias remotas, …etc), todo rota a nuestro alrededor. Incluso lo que está detrás de ese horizonte.
La existencia de materia detrás de ese horizonte está perfectamente permitida siempre que la materia "*no intente nadar contra la corriente y se deje arrastrar*" por el giro universal a velocidad angular $-w_o$.



Es decir, sustituimos $d\varphi'= -w_o.dt'$ en la métrica y operamos:

$(d\tau)^2 = (dt')^2.[1- r'^2.w_o^2/c^2] - 2.w_o.d\varphi'dt'.r'^2/c^2 - [dr'^2 + r'^2.d\varphi'^2+dz'^2]/c^2$

$(d\tau)^2 = (dt')^2 - 1/c^2.\ [\ (dr')^2 + r'^2.(d\varphi'+w_o.dt')^2 + (dz')^2]$

$(d\tau)^2 = (dt')^2 - 1/c^2.\ [\ (dr')^2 + r'^2.(0)^2 + (dz')^2]$

$(d\tau)^2 = (dt')^2 - 1/c^2.(dr'^2+dz'^2)$

Esto muestra que hay solución $d\tau$=real siempre que se cumpla $u'_r{}^2+u'_z{}^2<c^2$, con $u'_r=dr'/dt'$ y $u'_z=dz'/dt'$

He aquí otro ejemplo de gravedad artificial que admite la existencia de materia detrás del horizonte, y deja sembrada la idea de que eso podría ocurrir también en horizontes de sucesos creados por cuerpos físicos de gran masa. En los capítulos siguientes veremos que esta posibilidad se puede concretar introduciendo ciertas modificaciones en la parte espacial de la métrica.

6.8 ¿Principio de equivalencia?.

Cerramos este capítulo 6 con un subtítulo igual al del comienzo, planteado esta vez con un signo de interrogación que invita a dudar: ¿Gravedad y aceleración son realmente indistinguibles?

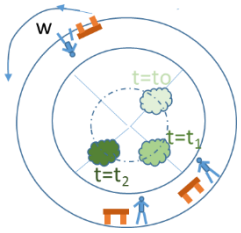
6.8.1 Caída libre "colectiva":

La caída libre es el experimento indicado para saber si estamos en un espacio libre o en presencia de campo gravitatorio. Se trata de dejar libre una partícula y observar su trayectoria:

- Si el movimiento es rectilíneo con velocidad uniforme concluimos que estamos en ausencia de gravedad.
- Si la partícula describe una curva concluimos que estamos en un campo gravitatorio. El movimiento acelerado, aunque sea rectilíneo, también clasifica dentro de esta categoría de *trayectoria curva* porque su gráfica en un plano (X,T) da un arco de parábola. Debemos acostumbrarnos a que trabajamos en un espacio-tiempo de 4 dimensiones y no solamente en un espacio de 3 dimensiones.

En el caso de trayectoria curva, una partícula aislada no basta para permitirnos distinguir si tenemos gravedad genuina o gravedad artificial causada por aceleración. Para poder discriminar estas situaciones debemos realizar un experimento de *caída libre colectiva*, observando no a una partícula aislada sino a un conjunto de partículas formando una "nube".
→caso-a: En un campo gravitatorio *artificial* o simulado todas las partículas viajan juntas y el volumen no se deforma.
→caso-b: En un campo gravitatorio *real* las partículas se desvían unas de otras y el volumen se deforma.

Ejemplos-a:
En la estación espacial rotatoria suponemos que los tripulantes frenan la rotación, colocan una nube de partículas sobre el techo, luego activan los motores para restaurar la rotación anti-horaria y observan la nube a través de vidrios o cámaras en instantes sucesivos $t'=t_o$, $t'=t_1$, $t'=t_2$…etc.

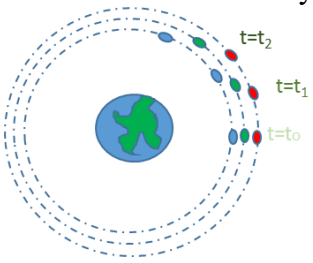


Si las condiciones iniciales son consistentes con una órbita a velocidad angular constante, cada partícula-i de la nube se ve desde la estación como si circulara con radio $r'[i]=cte$ y coordenada angular $\varphi'= \varphi_{[i]}-w_o.t'$. No hay ninguna deformación del volumen en el referencial Σ' de la estación rotatoria.
Podemos comprobar este hecho pasando al referencial Σ de acuerdo con los cambios de variable de 6.7.5:

$$t = t' \qquad \varphi = \varphi' + w_o.t' \qquad r = r' \qquad z = z'$$

En el referencial Σ, la condición $\varphi'= \varphi_{[i]} -w_o.t'$ se corresponde con reposo, es decir, $\varphi=\varphi_{[i]}$ cte.

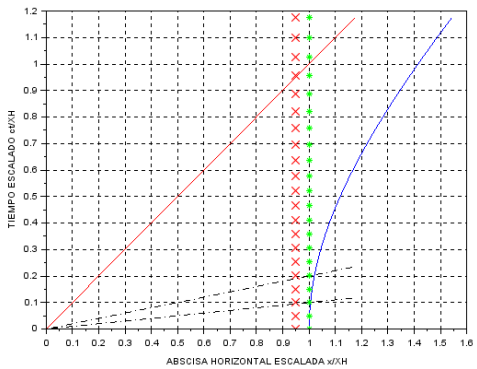
Ejemplos-b:
Repetimos el experimento anterior para objetos orbitando alrededor de la Tierra en la vecindad de un satélite. Las partículas de la zona celeste (según la figura) están ubicadas a un radio menor por lo que orbitan con mayor velocidad angular, de acuerdo con la 3ra Ley de Keppler. Las partículas de la zona roja están ubicadas a un radio mayor y orbitan a menor velocidad angular.



A medida que transcurre el tiempo la *nube* se va deformando, lo que inicialmente tenía un contorno rectangular sobre el plano orbital del dibujo pasa a tener un contorno de paralelogramo.
Curiosidad: A pesar de la deformación, el paralelogramo mantiene la misma base y la misma altura que el rectángulo inicial; lo que repercute en que el volumen se conserva aproximadamente, al menos durante un breve intervalo de tiempo y en sus primeras 2 derivadas $dVol/d\tau$ y $d^2Vol/d\tau^2$.
Todos estos fenómenos son manifestación de un fenómeno llamado deriva geodésica o desviación geodésica, que veremos con mayor detalle al avanzar en este trabajo (7.3.2, 8.5.4 y 9.2.2). Veremos también que la propiedad de conservación del volumen es exclusiva del espacio vacío deprovisto de energía: si hubiera materia o energía presente en la región que ocupa la nube de partículas, el volumen variaría además de deformarse.

6.8.2 Caída libre Rindler:

Haremos algunos cálculos en las coordenadas de Rindler, para anticipar ciertas dificultades matemáticas o conceptuales que pueden surgir en estos escenarios.



Supongamos que en T=0 lanzamos dos partículas desde el techo de la nave, una desde $X_A=X_H$ (graficada como asteriscos verdes) y otra desde un infinitésimo más abajo $X_B=X_H-\delta X$ (dibujada con cruces rojas).
La figura exagera el "*infinitésimo*" para que se pueda apreciar la separación de las partículas.

Para 2 cruces rojas vecinas, que pertenecen a la trayectoria de la misma partícula, se mantiene constante la abscisa de Minkowski 'x', dx=0. Entonces la expresión $(c.d\tau)^2 = (c.dt)^2 - dx^2$ nos dice que $d\tau=dt$ →el tiempo 't' de Minkowski es el tiempo propio 'τ' de las trayectorias.
Si aplicamos las fórmulas de cambio de base de 6.5, tenemos

$x^2-(ct)^2 = X^2$ →$x=X_B$, $t=\tau$ para la partícula roja
$X_B{}^2-(c\tau)^2 = X^2$

Las respectivas trayectorias quedan:

$X_B(\tau) = \sqrt{X_B^2 - c^2\tau^2}$ partícula baja, roja $\qquad$ $X_A(\tau) = \sqrt{X_A^2 - c^2\tau^2}$ partícula alta, verde

En tiempos 'τ' chicos, cuando la caída libre recién comienza, aproximamos por Taylor las raíces.
$X_B(\tau) \approx X_B - \frac{1}{2}.\tau^2.(c^2/X_B)$ $\qquad$ $X_A(\tau) \approx X_A - \frac{1}{2}.\tau^2.(c^2/X_A)$
Al ser $X_A>X_B$ resulta $|X_B^{\cdot\cdot}(\tau)| > |X_A^{\cdot\cdot}(\tau)|$.
La partícula 'B' acelera más que la 'A', parece que se están separando.

Si pensamos en las trayectorias como funciones del tiempo coordenado 'T' de Rindler, y aplicamos los desarrollos Taylor para el coseno hiperbólico, nos queda:
$X_B(T) = X_B/ch(cT/X_H)$ $\qquad$ $X_A(T) = X_A/ch(cT/X_H)$
$X_B(T) \approx X_B[1-\frac{1}{2}.c^2T^2/X_H^2)$ $\qquad$ $X_A(T) \approx X_A[1-\frac{1}{2}.c^2T^2/X_H^2)$
Ahora la partícula 'A' acelera más que la 'B', parece que se están acercando.

¿No se supone que esas desviaciones solo deberían ocurrir en casos de gravedad real? ¿Y no en este caso en que la gravedad es simulada? Nos preguntamos: ¿qué mide exactamente la desviación geodésica?
¿Cuál es el criterio para afirmar que "*A y B viajan juntas sin separarse*"?

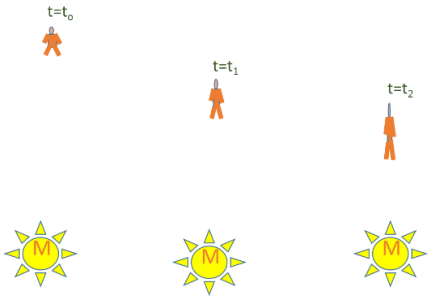
El criterio es: medir la distancia métrica dS_{AB} entre dos puntos de igual 'τ', uno rojo y uno verde.
El intervalo métrico fundamental es $dS^2=dx^2-(c.dt)^2$. Para estas trayectorias $t=\tau$, o sea que esos dos puntos cuya distancia estamos comparando difieren solo en la coordenada 'x' de Minkowski, y esa diferencia se mantiene constante $dx=\delta X$ (el infinitésimo de separación con el que fueron lanzadas las partículas).
Si lo viéramos en las coordenadas Rindler deberíamos calcular $dS^2=dX^2-(X/X_H)^2.(c.dT)^2$.
La diferencia coordenada dX solo mediría distancia métrica dS cuando dT=0. Pero las rectas T=cte tienen cierta inclinación, y en nuestro caso estamos midiendo la distancia métrica entre puntos 'x', '*' separados solo horizontalmente →lo que implica que hay involucrado un $dT\neq 0$ y que dS debe medirse por la fórmula métrica de coordenadas Rindler $dS^2=dX^2-(X/X_H)^2.(c.dT)^2$.

6.8.3 Fuerzas de marea:

Los experimentos de la sección anterior se refieren exclusivamente a caída libre; presuponen que las partículas que forman la nube no tienen ningún tipo de adherencia ni fuerza que las mantenga unidas, y sigue cada una de ellas en forma independiente la trayectoria que impone el campo gravitatorio.
Si las partículas están vinculadas formando un objeto, en ese caso una **gravedad no uniforme** va a *tironear* o *empujar* de manera diferente a las distintas porciones del objeto, mientras que el vínculo entre las partículas se intentará resistir a esa tendencia →el resultado son tensiones de tracción o compresión que se conocen con el nombre de fuerzas de marea (en inglés "*tidal forces*").

El nombre está inspirado en un fenómeno conocido: los océanos, es decir, las masas de agua sobre la superficie de la Tierra, están en presencia de una gravedad más intensa del lado enfrentado al Sol y más débil del lado opuesto al Sol. La Luna también hace su contribución, a pesar de ser menos masiva está más cerca y produce un mayor gradiente gravitatorio→ el efecto combinado de ambos astros es que la marea sube y baja periódicamente.

¿Qué ocurre si sustituimos los objetos inanimados por seres vivos?
La fuerza gravitatoria varía con el inverso del cuadrado de la distancia al centro de masa. De acuerdo con la figura, nuestros pies sufren más aceleración que nuestra cabeza.
También ocurre que nuestros brazos tienden a apretarse debido al carácter vectorial de las fuerzas, que no actúan paralelas en cada brazo sino que apuntan hacia el centro de atracción.



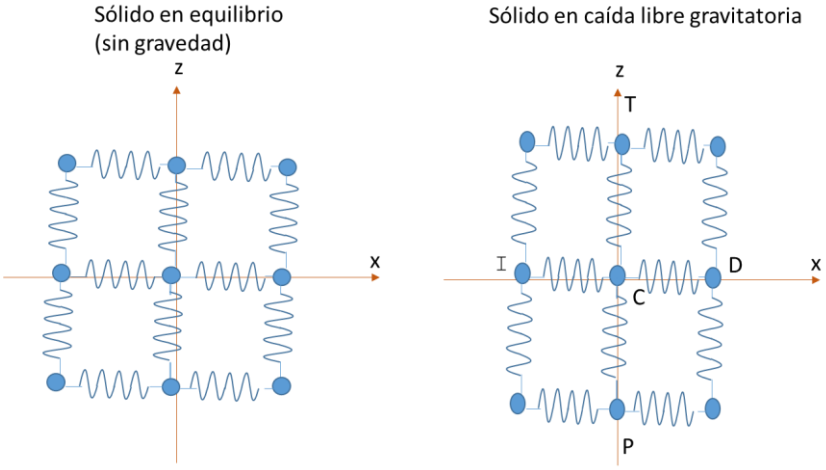
La figura está exagerada, fuera de escala. Busca servir de advertencia para desaconsejar la realización de estos experimentos con personas vivas, especialmente si estuviéramos en una zona con intenso gradiente gravitatorio: experimentaríamos un fenómeno describible como una "*espaguetización*".
En la sección 6.7.5 mencionamos el horizonte de sucesos de un agujero negro. Se nos puede despertar la curiosidad de explorar esa región y su interior, pero justamente ahí es donde sería máximo el riesgo de enfrentarnos con altas fuerzas de marea.

Hagamos algunos cálculos matemáticos simplificados. Lanzamos una nave en caída libre dentro de una región donde la gravedad apunta en la dirección-z, y llamamos z=0 al centro de la nave. A cada porción de materia de masa m_o y coordenada 'z' le aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange: $m_o.z^{\cdot\cdot}-\partial_z\mathcal{L}=F_z$.

- $\partial_z\mathcal{L}=m_o.g(z)$, fuerza gravitatoria en el punto-z
- $z^{\cdot\cdot}=g(0)$ porque todos los puntos están forzados a caer con la misma aceleración que el centro de la nave, por las fuerzas internas de la estructura sólida.
- F_z = solo es nula para el centro de la nave z=0.

$m_o.[g(0)–g(z)]= F_z$ →aproximamos derivada por cociente incremental
$m_o.z.g'(0)\approx –F_z$ →g'(z)=gradiente gravitatorio

Podemos razonar lo que está ocurriendo si pensamos que el sólido es levemente compresible y lo modelamos como formado por resortes que unen sus partes internas (la figura exagera la compresión).



Al iniciar la caída libre, el punto central 'C' experimenta más aceleración que el techo 'T'. Los puntos TC tienden a separarse levemente y se llega a una situación estacionaria en la que la tracción del resorte CT atrae al punto 'T' hacia el centro, y lo fuerza a caer con la misma aceleración colectiva que las porciones centrales del sólido.
Igualmente, el punto 'P' del piso es forzado a caer más lento que lo que haría en caída libre, y es la tracción del resorte CP quien lo frena.
Los puntos de la izquierda 'I' y de la derecha 'D' sufren fuerza gravitatoria dirigida hacia el interior de la nave, y al ser forzados a moverse en una estructura sólida los resortes CI y CD se comprimen.

La fórmula de las fuerzas de marea involucra el producto z.g'(z) y su valor máximo depende de la diferencia de gravedad Δg entre los extremos del objeto estudiado.
A los efectos de evaluar la posible influencia sobre un ser humano (*repetimos, es solo un análisis matemático que no pretende sugerir que sea llevado a la realidad*), se considera que la distancia cabeza-pies es de ~2 metros y que la máxima diferencia tolerable $\Delta g=g'(z).z$ es 10 veces la 'g' terrestre ($g\approx 10 m/s^2$).

Ejercicio: Utilizando las fórmulas de Newton para el gradiente gravitatorio $g'(r)=2MG/r^3$, y la definición de radio de Schwarzschild, demostrar que la fuerza de marea en el horizonte de sucesos es menor cuanto mayor es la masa 'M' del agujero.
Ejercicio: calcular cuánta masa 'M' debe tener un agujero negro para que las fuerzas de marea no sean instantáneamente letales en su horizonte r=rs. Pista: Debe dar una masa mucho mayor a la masa del Sol, por varios órdenes de magnitud.

Conclusión: La pregunta planteada al inicio del capítulo 6.8 debe responderse en forma negativa:
-No, la equivalencia entre gravedad y aceleración no es total.
Pero fue un buen punto de partida para comenzar el estudio de la Relatividad General, y seguirá acompañándonos ocasionalmente a lo largo de este trabajo.

7. CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO.

Citamos una frase del científico John Wheeler: https://es.wikipedia.org/wiki/John_Archibald_Wheeler
«El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse»

En términos de la métrica, que en nuestro trabajo se viene evidenciando como un concepto central para la Teoría de la Relatividad, tenemos dos aspectos a analizar:

a) Los objetos masivos 'M' deforman el espaciotiempo a su alrededor y generan un apartamiento respecto de la métrica de Minkowski.
b) Otros objetos 'm' sufren los efectos de la métrica deformada, lo que se manifiesta en que sus trayectorias en ausencia de fuerzas externas no son rectilíneas: según el caso las describimos como caída libre acelerada, parábola de proyectil, órbita planetaria…etc. La luz también sufre las modificaciones métricas: experimenta efecto Doppler y sigue trayectorias curvas.

En capítulos anteriores ya iniciamos el estudio del tema-b a través de las ecuaciones de Lagrange. Continuaremos ese enfoque y veremos que la búsqueda de trayectorias que minimicen la métrica $(dS)^2$ está muy relacionada con la búsqueda de caminos mínimos sobre una superficie curva.
En cuanto al tema-a (generación de perturbaciones), lo iniciaremos en este capítulo utilizando argumentos geométricos de curvatura y de similitud entre la Gravedad y el Electromagnetismo. Lo continuaremos en el capítulo 10 cuando estudiemos el llamado Tensor de Energía-Impulso.

7.1 Gravito-electromagnetismo.

Cuando comenzamos a estudiar la Gravitación y el Electromagnetismo, nos encontramos en ambos casos con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación. La masa juega el mismo rol que la carga →eso permite establecer un paralelismo inicial entre la Electrostática y algo que por analogía podríamos llamar "Gravitostática". Presentamos a continuación el resultado de extender el paralelismo hacia el resto del Electromagnetismo.

7.1.1 Enfoque cualitativo:

Electromagnetismo:

$\Phi = Q/(4\pi\epsilon_o r)$	potencial eléctrico creado por una carga 'Q' y observado a distancia 'r'
$\vec{E} = -\nabla\Phi$	campo eléctrico creado por una carga 'Q', deriva de un potencial Φ
$\vec{F} = q.\vec{E}$	fuerza eléctrica (de Coulomb) que experimenta una carga 'q'
$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_o$	Ley de Gauss-Coulomb en forma diferencial
ρ	densidad volumétrica de carga eléctrica
$\vec{J}$	densidad de corriente vectorial, fuente de $\vec{B}$
$\vec{B}$	campo magnético, deriva de un potencial vectorial $\vec{A}$

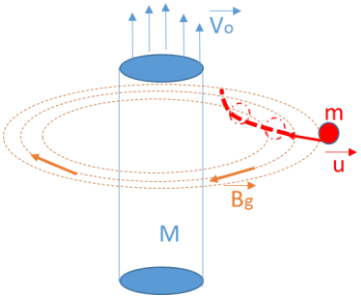
Gravedad:

$\Phi_g = -M.G/r$	potencial gravitatorio creado por una masa 'M', observado a distancia 'r'
$\vec{g} = \vec{E_g} = -\nabla\Phi_g$	campo gravitatorio creado por una masa 'M', deriva de un potencial Φ_g
$\vec{F_g} = m.\vec{E_g}$	fuerza gravitatoria (de Newton) que experimenta una masa 'm'
$\nabla \cdot \vec{E_g} = -4\pi.G.\rho_m$	Ley de Newton en forma diferencial
ρ_m	densidad volumétrica de masa
$\vec{j_m}$	flujo másico o corriente másica, fuente de $\vec{B_g}$
$\vec{B_g}$	campo *gravitomagnético*, deriva de un potencial vectorial $\vec{A_g}$

Para diferenciar a estas cantidades de sus análogas eléctricas o magnéticas les asignamos un subíndice 'g' de gravitación o 'm' de masa. Por ejemplo Φ_g, $\vec{E_g}$, $\vec{B_g}$, $\vec{A_g}$, ρ_m, $\vec{j_m}$.
Φ_g es lo que venimos llamando u_{pot} en secciones anteriores, energía potencial por unidad de masa.

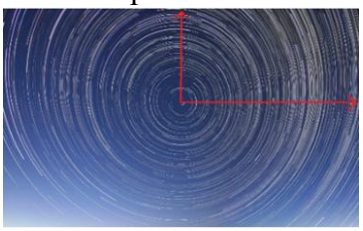
Este enfoque se llama Gravitomagnetismo o Gravitoelectromagnetismo y conduce a resultados interesantes desde el punto de vista cualitativo:

- Si combinamos las dos ecuaciones resaltadas en amarillo tenemos $\nabla^2\Phi_g = 4\pi.G.\rho_m$, que sirve como primera aproximación para calcular el potencial gravitatorio Φ_g y ubicarlo dentro del coeficiente temporal-temporal de la métrica como $-g_{oo}=1+2\Phi_g/c^2$, al menos en los casos estáticos.
- Cuando hay variaciones temporales, la antigua Ley de Gravitación de Newton *choca* contra la Relatividad Especial en la medida en que sugiere una propagación instantánea a velocidad infinita entre las causas y los efectos. Este nuevo enfoque propone una solución basada en el carácter *mediador* de los campos y potenciales Φ_g y $\vec{A_g}$, y abre las puertas a una propagación de efectos a velocidad finita compatible con la causalidad y con la Relatividad Especial.
- Las masas 'M',ρ_m moviéndose a velocidad $\vec{v_o}$ constituyen una corriente másica $\vec{j_m}$ y se muestran en el ejemplo de la figura como un "tubo" cilíndrico de color azul y dirección axial $\hat{z}$.
- En marrón se grafica el campo gravitomagnético $\vec{B_g}$ según $-\hat{\varphi}$ creado por los flujos de materia.
- Otras masas 'm', marcadas con color rojo en la figura, circulan en presencia de campos $\vec{B_g}$ con velocidad $\vec{u}$ y dirección radial entrante $-\hat{r}$.
- La fuerza experimentada es proporcional a 'm' y al producto vectorial $\vec{u}\wedge\vec{B_g}$



El efecto es tal que la masa roja, al intentar acercarse a la "corriente" azul, se desvía en el sentido de adquirir una componente a favor del flujo. Como si fuera arrastrada o invitada a participar del flujo. Se utiliza a veces el término de *arrastre de marco* ("*frame dragging*" en inglés) para describir este fenómeno. El nombre alude a que no hay contacto entre las masas, es como si el propio espaciotiempo fuera arrastrado en los alrededores de la corriente másica.

Un ejemplo extremo de este arrastre lo tendríamos en el Universo rotante (tal como se vería desde el referencial de la estación espacial de 6.7.5): la materia solo puede existir detrás de la región $r>c/w_o$ si se deja *arrastrar* por el resto de los astros giratorios.



Si un objeto se desprende o es lanzado fuera de la estación espacial, comenzará a describir un movimiento gobernado por la fuerza centrífuga y la de Coriolis. Visto desde el referencial giratorio Σ', la impresión es como si el objeto acompañara al resto del Universo rotante. Las leyes gravitatorias en ese referencial Σ' tienen que ofrecer una explicación para estas trayectorias, y las propias masas que forman parte del "Universo rotante" también tienen que seguir trayectorias consistentes.
El Principio de Equivalencia sugiere dos identificaciones o correspondencias:

fuerza centrífuga→gravitatoria estática fuerza de Coriolis→gravitomagnética

En la sección 5.2.4 realizábamos un primer acercamiento informal y cualitativo al Gravitomagnetismo. Ahora estamos en condiciones de profundizar más: primero completaremos las ecuaciones dinámicas análogas a las del Electromagnetismo, y luego continuaremos incorporando los potenciales gravitatorios Φ_g,$\vec{A_g}$ como parte de la distorsión métrica y aplicando los principios variacionales de Euler-Lagrange.

7.1.2 Enfoque cuantitativo por campos:

El punto de partida es la Ley de Newton, llevada a una forma diferencial análoga a la Ley de Gauss.
$\nabla \cdot \vec{E_g} = -4\pi G\rho_m$.
Esto nos permite definir una constante $\epsilon_G = -1/(4\pi G)$ que juega el rol del ϵ_o del Electromagnetismo.

Enunciamos la ecuación de continuidad o de conservación de las masas:

$\nabla \cdot \vec{j_m} + \partial_t \rho_m = 0$ →sustituimos
$\nabla \cdot \vec{j_m} - 1/(4\pi G).\partial_t \nabla \cdot \vec{E_g} = 0$ →cambiamos orden de derivación y agrupamos
$\nabla \cdot (\vec{j_m} - 1/(4\pi G).\partial_t \vec{E_g}) = 0$

Un campo vectorial con divergencia nula puede expresarse como un rotacional.
¿De quién? De un campo gravitomagnético $\vec{B_g}$, a menos de una constante de proporcionalidad.

$\nabla \wedge \vec{B_g} = \mu_G.(\vec{j_m} - 1/(4\pi G).\partial_t \vec{E_g})$

Ajustamos el factor de escala para que se cumpla $\mu_G.\epsilon_G = 1/c^2$ igual que en el Electromagnetismo.

$\nabla \wedge \vec{B_g} = 1/c^2.(-4\pi G\, \vec{j_m} + \partial_t \vec{E_g})$ →Esto sería una especie de "Ley de Ampere Gravitatoria"

Sustituimos en función de los potenciales $\vec{B_g} = \nabla \wedge \vec{A_g}$, $\vec{E_g} = -\nabla \Phi_g - \partial_t \vec{A_g}$

$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A_g}) = 1/c^2.(-4\pi G\, \vec{j_m} - \partial_t (\nabla \Phi_g + \partial_t \vec{A_g}))$ →aplicamos fórmula de Cálculo Vectorial
$\nabla(\nabla \cdot \vec{A_g}) - \nabla^2 \vec{A_g} = 1/c^2.(-4\pi G\, \vec{j_m} - \partial_t(\nabla \Phi_g + \partial_t \vec{A_g}))$ →expandimos
$\nabla(\nabla \cdot \vec{A_g}) - \nabla^2 \vec{A_g} = -4\pi G/c^2.\vec{j_m} - 1/c^2.\partial_t \nabla \Phi_g - 1/c^2.\partial_t^2 \vec{A_g}$ →reordenamos
$\nabla(\nabla \cdot \vec{A_g}) + 1/c^2.\partial_t \nabla \Phi_g + 4\pi G/c^2.\vec{j_m} = \nabla^2 \vec{A_g} - 1/c^2.\partial_t^2 \vec{A_g}$
$\nabla(\nabla \cdot \vec{A_g} + 1/c^2.\partial_t \Phi_g) + 4\pi G/c^2.\vec{j_m} = \nabla^2 \vec{A_g} - 1/c^2.\partial_t^2 \vec{A_g}$

Desacoplamos $\vec{A_g}, \Phi_g$ imponiendo una condición de calibre $\nabla \cdot \vec{A_g} + 1/c^2.\partial_t \Phi_g = 0$
Con esta simplificación nos queda una ecuación vectorial de ondas $\nabla^2 \vec{A_g} - 1/c^2.\partial_t^2 \vec{A_g} = 4\pi G/c^2.\vec{j_m}$

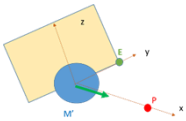
Continuamos con:

$\nabla \cdot \vec{E_g} = -4\pi G\rho_m$ →expresamos según los potenciales
$\nabla \cdot (-\nabla \Phi_g - \partial_t \vec{A_g}) = -4\pi G\rho_m$
$-\nabla^2 \Phi_g - \partial_t \nabla \cdot \vec{A_g} = -4\pi G\rho_m$ →aplicamos condición de calibre
$-\nabla^2 \Phi_g + 1/c^2.\partial_t \partial_t \Phi_g = -4\pi G\rho_m$

Reordenamos y llegamos a la ecuación escalar de ondas: $\nabla^2 \Phi_g - 1/c^2.\partial_t^2 \Phi_g = 4\pi G.\rho_m$

Las soluciones de estas ecuaciones son "**potenciales retardados**" igual que en el Electromagnetismo.
Con este modelado ya tenemos resuelto el tema de la causalidad, que era una de las mayores objeciones a la gravedad de Newton: los efectos no se transmiten en forma instantánea sino a la velocidad de la luz 'c'.

Curiosidad: Este modelo gravitomagnético también nos aporta argumentos para rescatar algunos detalles confusos que nos surgieron en 6.1.1, en nuestros primeros intentos de abordar la gravedad puramente por Relatividad Especial, antes de recurrir al Principio de Equivalencia.



La transformación de Lorentz nos sugería que la fuerza de Newton debía aparecer aumentada en el Ecuador 'E' y debilitada en el polo 'P', y no teníamos idea de cómo interpretarlo. Esas diferencias pueden ahora asociarse al nuevo término $-\partial_t \vec{A_g}$ que acabamos de ver: $\vec{E_g} = -\nabla \Phi_g - \partial_t \vec{A_g}$, fuerza por unidad de masa para las masas de prueba 'm'. Ejercicio: Sugerimos comprobar este efecto para cargas eléctricas en movimiento.

7.1.3 Enfoque cuantitativo por métrica:

Un enfoque basado puramente en campos y potenciales no explica bien la curvatura de la luz por gravedad ni el efecto Doppler gravitatorio. Para lograrlo nos proponemos encuadrar estas ideas de analogía electromagnética junto con los conceptos métricos de los capítulos previos 5 y 6.
Suponemos un sistema Σ' donde todas las masas están en reposo y conocemos su distribución espacial ρ'_m.

Resolvemos la ecuación de Poisson con fuentes $\nabla'^2\Phi'_g = 4\pi G.\rho'_m$ y formamos el Lagrangeano de acuerdo con la propuesta métrica 6.6.5:

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(1+2\Phi_g'/c^2).\dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2}$$

Suponemos también que ese referencial Σ' se mueve con velocidad $\vec{v_o} = v_o.\hat{x}$ respecto a otro Σ.
Expresamos todo en función de las coordenadas de Σ, aplicando la transformación de Lorentz con velocidad $\vec{v_o}$, factor $\gamma_o = 1/\sqrt{1-v_o^2/c^2}$ y fórmulas:

$$\dot{t}' = \gamma_o.(\dot{t} - v_o/c^2.\dot{x}) \qquad \dot{x}' = \gamma_o.(\dot{x} - v_o.\dot{t}) \qquad \dot{y}'=\dot{y} \qquad \dot{z}'=\dot{z}$$

Separamos la parte invariante de Minkowski $\dot{t}'^2 - 1/c^2(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2) = \dot{t}^2 - 1/c^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$.

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2 + 2\Phi_g'/c^2.\dot{t}'^2}$$

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2 - \dot{x}^2/c^2 - \dot{y}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2 + 2\Phi_g'/c^2.\ \gamma_o^2.(\dot{t}^2 - 2v_o/c^2.\dot{t}.\dot{x} + v_o^2/c^4.\dot{x}^2)}$$

Reagrupamos:

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2.(1+2\Phi_g'/c^2.\gamma_o^2) - \dot{x}^2/c^2(1-2.\Phi'_g/c^2.\gamma_o^2.v_o^2/c^2) - \dot{y}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2 - 4\Phi_g'\gamma_o^2 v_o/c^4.\dot{t}\,\dot{x}}$$

Este cambio de variables que acabamos de realizar produjo un efecto matemático en la métrica y en su lagrangeano asociado.
La esencia de la Teoría de la Relatividad es que cualquier cambio de referencia es válido, solo debemos buscarle un significado físico coherente a los términos que se formaron en el nuevo referencial Σ:

- Parte temporal: $\dot{t}^2.(1+2\Phi_g'/c^2.\gamma_o^2)$. El factor que multiplica a $\dot{t}^2$ lo interpretamos como $(1+2.\Phi_g/c^2)$. $\Phi_g = \gamma_o^2.\Phi'_g$ es el nuevo potencial gravitatorio visto en Σ.
  Este potencial es más intenso que el medido en el referencial Σ'. Esto es consistente con el hecho de que las masas que lo causan ahora se ven móviles y *pesan* más, su energía cinética contribuye a un aumento relativista de la masa efectiva en armonía con lo expuesto en 5.2 "$E=mc^2$".
  La fórmula es similar a la del Electromagnetismo, salvo por el factor gamma al cuadrado.
- Parte espacial: $\dot{x}^2/c^2\,(1-2.\Phi'_g/c^2.\gamma_o^2.v_o^2/c^2)$. Perturbación que no tiene contraparte electromagnética, y que deja plantada la advertencia de que el paralelismo entre Electromagnetismo y Gravedad no puede ser completo. De momento no nos concentramos en ella por ser de segundo orden en v_o/c, y preferimos en un principio analizar *partículas moviéndose lentamente afectadas por campos débiles*.
- Parte mixta: $4\Phi'_g\gamma_o^2 v_o/c^4.\dot{t}\,\dot{x}$. Es de la forma $2.A_{gx}.\dot{x}.\dot{t}/c^2$, siendo $A_{gx}=2.\Phi'_g.\gamma_o^2.v_o/c^2$ la componente-x del potencial vectorial gravitomagnético $\vec{A_g}$ causado por las masas ρ'_m que al moverse se ven como corrientes $\vec{j_m}$ en Σ.

Cuando las masas 'M' y ρ'_m causantes de la gravedad se mueven en direcciones arbitrarias, tendríamos el siguiente panorama (ignorando de momento la perturbación espacial):

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) \approx -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2.(1+2\Phi_g/c^2) - \dot{x}^2/c^2 - \dot{y}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2 - 2/c^2.\dot{t}.[\dot{x}.A_{gx}+\dot{y}.A_{gy}+\dot{z}.A_{gz}]}$$

m_o = masa de una partícula de prueba a la que le queremos analizar la trayectoria en este espaciotiempo alterado. Los términos $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ forman un potencial variable con la velocidad, y conducen a cálculos matemáticos muy similares a los del Electromagnetismo de la sección 5.5.3; no damos los detalles completos, solo las líneas generales hasta encontrar una fuerza $(m).\vec{u}\wedge\vec{B_g}$ cuando antes era $q.\vec{u}\wedge\vec{B}$.

Momento-x:

$$P_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = m_o.(\dot{x} + A_{gx}.\dot{t})$$

$$dP_x/d\tau = m_o.(\ddot{x} + \partial_t A_{gx}.\dot{t}^2 + \partial_x A_{gx}.\dot{x}\dot{t} + \partial_y A_{gx}.\dot{y}\dot{t} + \partial_z A_{gx}.\dot{z}\dot{t}) \qquad \text{(ignoramos } \ddot{t} \text{ por ser } \dot{t}\approx 1)$$

Fuerza gravitatoria en 'x':

$$\partial\mathcal{L}/\partial x = m_o.(-\dot{t}^2.\partial_x\Phi_g + \dot{x}.\dot{t}.\partial_x A_{gx} + \dot{y}.\dot{t}.\partial_x A_{gy} + \dot{z}.\dot{t}.\partial_x A_{gz})$$

Ecuación de Euler-Lagrange en 'x':

$$dP_x/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial x$$

$$\ddot{x} + \partial_t A_{gx}.\dot{t}^2 + \partial_x A_{gx}.\dot{x}\dot{t} + \partial_y A_{gx}.\dot{y}\dot{t} + \partial_z A_{gx}.\dot{z}\dot{t} = -\dot{t}^2.\partial_x \Phi_g + \dot{x}.\dot{t}.\partial_x A_{gx} + \dot{y}.\dot{t}.\partial_x A_{gy} + \dot{z}.\dot{t}.\partial_x A_{gz}$$

$$\ddot{x} = -\partial_t A_{gx}.\dot{t}^2 - \dot{t}^2.\partial_x \Phi_g - \partial_x A_{gx}.\dot{x}\dot{t} - \partial_y A_{gx}.\dot{y}\dot{t} - \partial_z A_{gx}.\dot{z}\dot{t} + \dot{x}.\dot{t}.\partial_x A_{gx} + \dot{y}.\dot{t}.\partial_x A_{gy} + \dot{z}.\dot{t}.\partial_x A_{gz}$$

$$\ddot{x} = -\partial_t A_{gx}.\dot{t}^2 - \dot{t}^2.\partial_x \Phi_g + \dot{y}.\dot{t}.(\partial_x A_{gy} - \partial_y A_{gx}) + \dot{z}.\dot{t}.(\partial_x A_{gz} - \partial_z A_{gx})$$

$$\ddot{x} = -\partial_t A_{gx}.\dot{t}^2 - \dot{t}^2.\partial_x \Phi_g + \dot{y}.\dot{t}.B_{gz} + \dot{z}.\dot{t}.(-B_{gy})$$

La parte sombreada gris es la aceleración gravitatoria o campo $\vec{E_g}$ de 7.1.2, una fuerza por unidad de masa cuando la masa está en reposo.
La parte coloreada en verde y azul es la proyección-x del producto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{B_g}$, con $\vec{u}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ y $\vec{B_g}=\nabla \wedge \vec{A_g}$. Parece que se está replicando en forma exacta la teoría electromagnética.

Pero… Todo esto se basó en la identificación $A_{gx}=2.\Phi'_g.\gamma_o^2.v_o/c^2$.
La ley que genera este potencial a partir de las corrientes no es la equivalente "Ampere" de la sección anterior 7.1.2, hay una discordancia por un factor 2.
Si queremos un máximo parecido con la sección 7.1.2 deberemos definir de manera diferente el potencial gravitomagnético $A_{gx}=\Phi'_g.\gamma_o^2.v_o/c^2$. Entonces el factor '2' nos aparece en la fuerza gravitomagnética, que pasa a valer $(2m).\vec{u} \wedge \vec{B_g}$.en lugar de $(m).\vec{u} \wedge \vec{B_g}$.

Advertencia: Este análisis métrico muestra que lo que llamamos "fuerza gravitatoria" ya no se transforma siguiendo las leyes de un buen cuadrivector durante un cambio de referencia. Si la fuerza gravitatoria fuera un auténtico cuadrivector, la transformación de Lorentz sugerida en el anticipo 5.2.4 estaría prediciendo que la componente magnética debería ser $(m).\vec{u} \wedge \vec{B_g}$. En este capítulo nos encontramos con una discordancia, lo que significa que estrictamente deberíamos cambiarle el nombre y llamarla "*pseudo-fuerza*" en vez de fuerza. O mantener el nombre "fuerza" pero entre comillas.

Se observa una diferencia entre Gravedad y Electromagnetismo. Al momento de buscarle una explicación, un argumento es el hecho de que no es posible juntar Φ_g y $\vec{A_g}$ dentro de un cuadrivector *bien-variante*, como sí era posible hacerlo con los potenciales $\Phi,\vec{A}$ del Electromagnetismo.
Comparamos los dos escenarios físicos analizados en este trabajo:

- Electromagnetismo (5.5.2 y 5.5.3), términos lagrangeanos: $\dot{t}.\Phi - \dot{x}.A_x - \dot{y}.A_y - \dot{z}.A_z$
- Gravitación (7.1), términos lagrangeanos: $\Phi_g.\dot{t}^2 - 2A_{gx}.\dot{x}.\dot{t} - 2A_{gy}.\dot{y}.\dot{t} - 2A_{gz}.\dot{z}.\dot{t}$

Si algo tienen en común estos términos gravitatorios es el orden 2 en las componentes de velocidad propia, lo que sugiere que la generalización más probable no es con un potencial cuadrivectorial sino tensorial.

Debemos pensar en un Lagrangeano con esta estructura: $\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{-g_{\alpha\beta}.U^\alpha U^\beta/c^2}$

Siendo $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$
Tensor métrico total = tensor base de Minkowski + tensor de perturbaciones gravitatorias

$h_{\alpha\beta} = 2/c^2$ *

[	$-\Phi_g$	$c.A_{gx}$	$c.A_{gy}$	$c.A_{gz}$]
[	$c.A_{gx}$	0?	0?	0?]
[	$c.A_{gy}$	0?	0?	0?]
[	$c.A_{gz}$	0?	0?	0?]

El esfuerzo de buscar una expresión tensorial vale la pena, porque ya vimos en otros capítulos de este trabajo que así funcionan las recetas para encontrar ecuaciones físicas invariantes. Aquí tenemos 2 superíndices α β en las velocidades propias, lo que motiva a balancearlos mediante una cantidad doblemente covariante $h_{\alpha\beta}$ con 2 subíndices.
Con nuestra redefinición de potencial gravitomagnético $\vec{A_g}$, vemos que que sus componentes aparecen en pie de igualdad con el potencial Φ_g dentro del tensor de perturbaciones. El factor '2' discordante se manifiesta en la métrica expandida, y repercute en fuerzas con valor doble respecto al clásico esperado.

7.1.4 Limitaciones:

A pesar del esfuerzo, veremos que todavía falta recorrer camino antes de alcanzar una descripción satisfactoria. Los casilleros de la sub-matriz espacial 3x3 de $h_{\alpha\beta}$ no caben dentro del modelado por analogía con el Electromagnetismo. Si fueran nulos no tendríamos que preocuparnos, pero basta un cambio de variable Lorentz para que aparezcan términos como el recién descrito $\dot{x}^2/c^2\,(1-2.\Phi'_g/c^2.\gamma_o^2.v_o^2/c^2)$. En el mejor caso podremos ignorarlos mientras nos mantengamos en régimen de bajas energías $v_o \ll c$.

Por otro lado: ignorar la submatriz espacial también es motivo de preocupación conceptual porque *la métrica tal como la estamos modelando hasta el momento no tiene perturbaciones espaciales*.
En los capítulos 2 y 3 de Introducción a la Relatividad Especial comenzamos analizando fenómenos donde parecían afectarse únicamente las partes espaciales o solo las partes temporales de las magnitudes involucradas. Las fórmulas se fueron unificando gradualmente hasta llegar a la Transformación de Lorentz, donde quedó en evidencia que en todos los casos había perturbación tanto espacial como temporal.
Teníamos una simetría en el tratamiento del espacio y del tiempo, y esa simetría es la que nos está faltando: hasta el momento modelamos en la Gravitación una dilatación de tiempos pero no nos aparece todavía ningún fenómeno análogo a una contracción de longitudes.

No se trata únicamente de una cuestión estética. También podemos sembrar dudas sobre la validez de la ecuación que genera las alteraciones métricas: $\nabla^2\Phi_g = 4\pi.G.\rho_m$
Los desarrollos del capítulo 6 nos invitan a pensar que el potencial Φ_g aparece en la métrica dentro del coeficiente temporal como $-g_{00}= 1 +2.\Phi_g/c^2$. Lo que implica que debería verificarse $-\nabla^2 g_{00} = 8\pi.G/c^2.\rho_m$

Sin embargo, esto no se cumple en forma exacta en ninguno de los dos sistemas acelerados que estudiamos.

- En la nave acelerada con coordenadas de Rindler, $-g_{00}=(X/X_H)^2$
  $-\nabla^2 g_{00}=\partial_X^2(-g_{00})+\partial_Y^2(-g_{00})+\partial_Z^2(-g_{00})=2/X_H^2$
  →Esta asociación entre laplaciano y masa predice la presencia de materia que llena con densidad uniforme todo el espacio vacío, y sabemos que no puede ser cierto.
- En la estación espacial rotatoria, $-g_{00}= 1 -r^2.w_0^2/c^2$
  Para el laplaciano de este otro escenario usamos las fórmulas de coordenadas cilíndricas
  $$\begin{aligned}-\nabla^2 g_{00} &= -1/r.\partial_r(r.\partial_r g_{00})\\ &= -1/r.\partial_r(r.\ 2r.w_0^2/c^2)\\ &= -2.w_0^2/c^2/r.\partial_r(r^2)\\ &= -2.w_0^2/c^2/r.(2r)\\ &= -4.w_0^2/c^2\end{aligned}$$
  →Aquí la objeción es mayor porque nos aparece una densidad de masa negativa

Ejercicio: Para el sistema acelerado con $X_H=c^2/a_H$, siendo $a_H=9.81 m/s^2$ (gravedad terrestre), calcular numéricamente la densidad de masa *ficticia* y comprobar que da $1.3*10^{-6}$ kg/m^3.
Un valor tan bajo permite que podamos despreocuparnos de esta imprecisión, al menos por el momento. De cualquier manera queda hecha la advertencia.
En próximas secciones comenzaremos a estudiar la relación entre la gravedad y la curvatura del espaciotiempo. La Geometría Diferencial de los capítulos 8 y 9 nos dará herramientas matemáticas para describir en forma más exacta la curvatura, en base a operadores diferenciales más avanzados que el laplaciano clásico y que no se dejan engañar con densidades de masa ilusorias.

7.2 Perturbación métrica espacial.

En la sección anterior 7.1.3 calculábamos una alteración métrica $\dot{x}^2/c^2(1-2.\Phi_g'/c^2.\gamma_o^2.v_o^2/c^2)$, como insinuando que las masas deberían moverse a velocidad relativista para causar distorsión espacial apreciable. Veremos a través de distintos razonamientos que no es necesario llegar a tales extremos.
Comenzamos analizando la relación recién encontrada en 7.1.3: $\Phi_g = \gamma_o^2.\Phi'_g$.
Para bajas velocidades se cumple que $v_o \ll c$, entonces podemos aproximar $\gamma_o^2 = 1/(1-v_o^2/c^2) \approx 1+v_o^2/c^2$.

$$\Phi_g = \gamma_o^2.\Phi'_g \approx (1+v_o^2/c^2).\Phi'_g$$
$$\Phi_g = \Phi'_g + v_o^2/c^2.\Phi'_g$$
$$\Phi_g = \Phi'_g + \Delta\Phi_g$$

Esto podemos interpretarlo de la siguiente manera:

- Φ'_g=contribución al potencial proveniente de la masa propia (cantidad de materia)
  Es percibido en ambos referenciales, Σ' y Σ, ya que la masa propia es un invariante.
- $\Delta\Phi_g = v_o^2/c^2.\Phi'_g$=incremento por energía cinética o masa equivalente según relación 5.3 $E=mc^2$
  Solo es percibido desde el referencial Σ, que es donde se ven móviles las masas.

Por otro lado, la alteración métrica espacial $\dot{x}^2/c^2\,(1-2.\Phi_g'/c^2.\gamma_o^2.v_o^2/c^2)$ puede re-escribirse en términos de un coeficiente multiplicativo $g_{xx}=1-2\Psi_g/c^2$, siendo $\Psi_g=\gamma_o^2.v_o^2/c^2.\Phi_g'$.
A bajas velocidades, $v_o \ll c$ y $\gamma_o \approx 1$, por lo tanto se cumple $\Psi_g \approx \Delta\Phi_g$. Esto significa que la energía cinética de las masas móviles produce un potencial espacial de igual magnitud que el incremento en el potencial temporal, lo que nos enfrenta a una situación asimétrica:

- ¿las masas propias contribuyen solo a Φ_g y no aportan nada a Ψ_g? ¿$\Psi_g=0$?
- ¿la energía cinética crea ambos potenciales en iguales proporciones? ¿$\Delta\Psi_g \approx \Delta\Phi_g$?

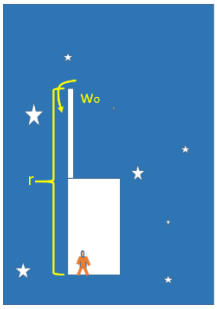
Argumentos de simetría y de equivalencia masa-energía siembran la idea de que **las masas propias también deberían ser fuente de potencial espacial Ψ_g**, y eso repercutiría en los escenarios de masas en reposo con un **$\Psi_g' \approx \Phi_g'$**. Veremos que estas alteraciones métricas aparecen en muchos cambios de variables que involucran funciones no lineales de las coordenadas: producen una métrica que se aparta "levemente" de la cartesiana y admiten una interpretación geométrica en términos de una curvatura.

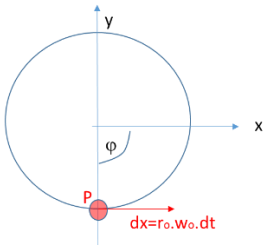
7.2.1 Perturbación por cambio de variable:

Reforzaremos estas ideas re-analizando las dos formas introducidas en el capítulo 6 para simular gravedad terrestre en el espacio: Aceleración lineal (Rindler) y aceleración rotatoria.
Volvemos a estos dos ejemplos ahora con un objetivo más ambicioso: aproximar la gravedad no solamente en un punto particular sino en una región mayor.

Aceleración rotatoria:
Nuestra estación giratoria describe una trayectoria $r=r_o$, $\varphi=w_o.t$.
Queremos investigar las relaciones métricas para objetos que acompañen dicho giro casi en su totalidad, salvo pequeñas perturbaciones.
En una primera instancia podríamos pensar en el cambio de variables de 6.6.4:

$$t \approx t'$$
$$\varphi \approx w_o.t' + \varphi' \quad \text{, siendo } \varphi' \text{ el ángulo (pequeño) de apartamiento}$$





Decidimos ir un poco más allá de estas fórmulas, porque son análogas a la Transformación de Galileo clásica y no obtienen todo el provecho que podrían obtener de los avances en Relatividad Especial.
La Transformación de Lorentz motiva a buscar cambios de coordenadas con la siguiente estructura:

$t = \gamma_o.(t' + \alpha.\varphi')$ $\varphi = \gamma_o.(\varphi' + w_o.t')$

Podemos alinearnos exactamente con las transformaciones de Lorentz conocidas eligiendo un punto de calibración o referencia 'P', por ejemplo el *techo* de la estación $r=r_o$, $\varphi= -\pi/2$ donde se cumple:

$r_o.d\varphi=dx$	desplazamiento transversal al radio de giro
$r_o.d\varphi'=dx'$	mismo desplazamiento medido en Σ'
$v_o=r_o.w_o$	velocidad lineal

Lo que significa que $\gamma_o^2=1/(1-r_o^2w_o^2/c^2)$ y $\alpha=r_o^2.w_o/c^2$.
Ejercicio: Demostrarlo identificando $dt = \gamma_o.(dt' + \alpha.d\varphi')$ con $dt=\gamma_o.(dt'+v_o/c^2.dx')$ de un Lorentz.
Ejercicio: Demostrar que la coordenada temporal t' mide tiempo propio de un viajero con $r=r_o$, $\varphi'=0$.

$dt = \gamma_o.(dt' + w_o.r_o^2/c^2.d\varphi')$ $d\varphi = \gamma_o.(d\varphi' + w_o.dt')$

La métrica en Σ es:
$(c.d\tau)^2 = (c.dt)^2 - (dr)^2 - r^2.(d\varphi)^2 - dz^2$

Pasamos al referencial Σ' por esta transformación angular similar a la de Lorentz:
$(c.d\tau)^2=\gamma_o^2.c^2[(dt')^2+2.w_o.r_o^2/c^2.d\varphi'.dt'+w_o^2.r_o^4/c^4.(d\varphi')^2] -dr^2-dz^2- r^2.\gamma_o^2.[(d\varphi')^2+2.w_o.d\varphi'.dt'+w_o^2.(dt')^2]$

Agrupamos:
$(c.d\tau)^2 = \gamma_o^2.(c.dt')^2[1-r^2.w_o^2/c^2] + 2.\gamma_o^2.w_o.d\varphi'.dt'.[r_o^2-r^2] -(d\varphi')^2.\gamma_o^2.[r^2-r_o^4.w_o^2/c^2] -[(dr)^2+(dz)^2]$

Analizamos los términos que se forman:

- Término temporal: $\gamma_o^2.(c.dt')^2[1 -r^2.w_o^2/c^2]$. Sustituimos el γ_o por su expresión correspondiente, y bajo la hipótesis de bajas velocidades $r.w_o \ll c$ podemos aproximar como:
  $\approx [1+ r_o^2.w_o^2/c^2]. c^2(dt')^2.[1 -r^2.w_o^2/c^2]$,
  $\approx c^2(dt')^2.[1 + (r_o^2-r^2).w_o^2/c^2]$,
  lo que significa que la dilatación temporal es inexistente en $r=r_o$ pero se empieza a manifestar progresivamente cuando nos movemos hacia $r>r_o$.
- Término mixto: $2.\gamma_o^2.w_o.d\varphi'.dt'.[r_o^2-r^2]$. Modela la fuerza de Coriolis.
  Se anula en $r=r_o$ y crece cuando bajamos hacia $r>r_o$.
- Términos espaciales r,z: $[(dr)^2+(dz)^2]$.
  No hay alteración en las coordenadas de distancia lineal
- Término espacial 'φ': $(d\varphi')^2.\gamma_o^2.[r^2-r_o^4.w_o^2/c^2]$.
  Las distancias afectadas son las que se miden con la coordenada angular φ'.
  Con la misma hipótesis de bajas velocidades $v_o \ll c$ nos queda:
  $\approx (d\varphi')^2.[1+ r_o^2.w_o^2/c^2].[r^2-r_o^4.w_o^2/c^2]$
  $\approx r^2.(d\varphi')^2.[1+r_o^2.w_o^2/c^2].[1-r_o^4/r^2.w_o^2/c^2]$
  $\approx r^2.(d\varphi')^2.[1+(r_o^2-r_o^4/r^2).w_o^2/c^2]$
  $\approx r^2.(d\varphi')^2.[1+(r^2-r_o^2)r_o^2/r^2.w_o^2/c^2]$

La distorsión espacial consiste en una pequeña contracción de longitudes, que se intensifica a medida que *bajamos* en la estación: puede buscarse una interpretación en términos del efecto Lorentz de la Relatividad Especial debido a que los puntos a mayor radio giran más rápido.
Aclaración: la fuerza centrífuga nos impulsa desde $r=r_o$ hacia $r>r_o$, nos marca la dirección de caída gravitatoria. Por eso identificamos como "abajo" a la zona $r>r_o$ y como "techo" al límite $r=r_o$.

Tenemos entonces: $(c.d\tau)^2=(c.dt')^2.(1+2.\Phi_g/c^2) - r^2.(d\varphi')^2.(1-2.\Psi_g/c^2) -(dr)^2-(dz)^2+$ término mixto$(d\varphi',dt')$

$\Phi_g = ½.(r_o^2–r^2).w_o^2$, $\Psi_g=(r_o/r)^2.\Phi_g$. En una pequeña región en la cual 'r' se aparta poco de r_o ($r\approx r_o$), las distorsiones temporales y espaciales adquieren casi el mismo valor pero signo contrario. $\Psi_g\approx\Phi_g$
El potencial centrífugo Φ_g es esencialmente el mismo que introdujimos en la sección 6.6 salvo el factor aditivo constante que marca una nueva referencia de cero para el potencial. En este caso Φ_g se anula en $r=r_o$.
Reflexión: La condición $\Phi_g=0$ marca la frontera donde desaparece el efecto relativista de dilatación temporal. El cambio de variable que acabamos de realizar nos sitúa en la vecindad inmediata de esa frontera, donde vemos que también se afecta la métrica espacial y en proporción similar. Ganamos simetría.
En la métrica planetaria de 6.7 esa frontera está en $r\to\infty$, y el parecido entre Φ_g y Ψ_g debería acentuarse en valores altos de 'r'. El modelo de métrica propuesto al final de 6.6 todavía no contemplaba perturbaciones espaciales Ψ_g, pero no debemos castigarnos por esa omisión porque la frontera $r=\infty$ está muy *lejos* de nuestros puntos de análisis y es difícil extraer conclusiones en esa situación.
Ejercicio: Observar que la fuerza de Coriolis es similar a la fuerza gravitomagnética en el sentido en que es proporcional a la velocidad y actúa en dirección perpendicular.

Aceleración lineal "Rindler":
Partimos de la métrica en coordenadas Rindler $(dS)^2 = –(X/X_H)^2(c.dT)^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$
Realizamos un cambio de variables $X\to U$ que linealiza la perturbación cuadrática en la parte temporal:

$(X/X_H)^2=U/U_H$

$X= X_H.\sqrt{U}\,/\sqrt{U_H}$ →diferenciamos

$dX = X_H.dU./(2\sqrt{U}\,)/\sqrt{U_H}$ →elevamos al cuadrado

$dX^2= dU^2.X_H^2/4/U/U_H$

Calibramos la constante U_H para que valga $dX=dU$ en el punto de referencia de potencial nulo ($X=X_H$ $U=U_H$), así aseguramos que dU mida las distancias que esperamos.
La condición que debe cumplirse es $X_H^2/4/U_H/U_H =1$, es decir, $X_H=2U_H$.
La métrica de Rindler, expresada en las nuevas coordenadas (cT,U,Y,Z), queda:
$(dS)^2 = – (U/U_H).(c.dT)^2 + (U_H/U).dU^2 + dY^2 + dZ^2$

La coordenada 'U' surgió de un cambio de variable puramente matemático, no está clara su interpretación física. Pero al menos se repite el mismo resultado que en la estación rotatoria: hay un punto "*alto*" ($U=U_H$) en el que se anula el potencial gravitatorio y la métrica es exactamente la de Minkowski, y cuando *bajamos* un poco respecto de ese punto aparece una perturbación espacial de igual magnitud que la temporal.
Lo podemos ver más claro utilizando la aproximación de campos débiles en un entorno de valores en que $U=U_H+u$, con $|u|\ll U_H$.
$U/U_H=1+u/U_H$ $\to U_H/U\approx 1 –u/U_H$

Comprobamos que $1+u/U_H = 1 + 2.u/X_H = 1 + 2.u.A_H/c^2$
Es de la forma $1+ 2.\Phi_g/c^2$, con $\Phi_g=u.A_H$. La expresión de Φ_g es igual a la que se utiliza en la aproximación sobre la superficie de la Tierra con $A_H=g$, cuando las regiones de análisis son de dimensiones reducidas.

7.2.2 Análisis de fuerzas:
Los dos casos de esta sección 7.2.1 resultan en cierta forma complementarios:
-uno de ellos sugiere la posibilidad de distorsiones métricas en desplazamientos transversales a la gravedad,
-mientras que el otro sugiere perturbaciones métricas en los desplazamientos paralelos a la gravedad.

Desviación de la luz:
Nos planteamos demostrar, al menos de manera informal, que esta corrección métrica que estamos vislumbrando para la parte espacial es compatible con la doble deflexión de los rayos solares que se observó en el eclipse de 1919 (y que se confirmó en sucesivos experimentos a lo largo de este último siglo).
La modificación métrica que estamos proponiendo repercute en el Lagrangeano. Si la aplicamos a la gravedad en la superficie de un astro masivo, tendríamos algo de este estilo:

$d\tau^2 \approx [1+2.\Phi_g(z)/c^2].dt^2 - (1-2.\Psi_g(z)/c^2).[dx^2+dy^2+dz^2]/c^2$

$\mathcal{L} \approx -m_o.c^2.\sqrt{[1+2.\Phi_g(z)/c^2].\dot{t}^2 - (1-2.\Psi_g(z)/c^2).[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2]/c^2}$

→'z' es la dirección de *altura* en la que apunta localmente la gravedad.

Estamos combinando los dos efectos recién estudiados: en (x,y) asumimos una alteración transversal como la sugerida en la estación rotatoria con cambio de variable de Lorentz, y en 'z' asumimos una alteración longitudinal como la insinuada en la forma linealizada de Rindler. Así tratamos en forma isotrópica a las 3 coordenadas espaciales. Llamamos Ψ_g al potencial espacial, le ponemos otro nombre que al potencial temporal Φ_g para que quede clara la influencia de cada uno.

Los trayectos ópticos, de métrica nula, se obtienen de tomar el límite $d\tau=0$, $dx^2+dy^2+dz^2=u_c^2dt^2$.
La velocidad coordenada de la luz queda: $u_c^2= c^2 .[1+2.\Phi_g(z)/c^2]/[1-2.\Psi_g(z)/c^2]$
La incorporación de un potencial $\Psi\approx\Phi$ produce un doble enlentecimiento de la velocidad coordenada, un doble gradiente de índice de refracción y un desvío angular de magnitud doble.

Podemos ver este efecto desde el punto de vista de un proyectil que circula en dirección transversal a la gravedad, con velocidad horizontal $\dot{x}=u_o.\dot{t}$, $\dot{y}=0$, $\dot{z}=0$
Ejercicio: Demostrar que los cálculos lagrangeanos conducen a:

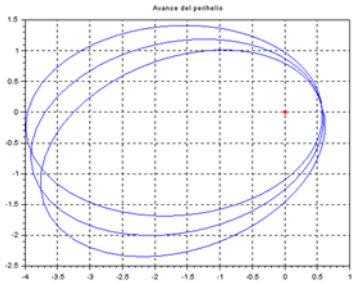
$\partial\mathcal{L}/\partial z = -m_o.\dot{t}^2.[\partial_z\Phi_g + u_o^2/c^2.\partial_z\Psi_g]$

$P_z=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{z} = m_o.[1-2.\Psi_g/c^2].\dot{z}$

$dP_z/d\tau = m_o.[1-2.\Psi_g/c^2].\ddot{z}(\tau) = m_o.[1-2.\Psi_g/c^2].\dot{t}^2.d^2z/dt^2$

De donde se puede despejar: $[1-2.\Psi_g/c^2].d^2z/dt^2= -[\partial_z\Phi_g + u_o^2/c^2.\partial_z\Psi_g]$
En escenarios de campos débiles $|\Psi_g|\ll c^2 \rightarrow$ $d^2z/dt^2\approx -[\partial_z\Phi_g + u_o^2/c^2.\partial_z\Psi_g]$
Este potencial Ψ_g no altera en forma apreciable los experimentos basados en proyectiles clásicos con $u_o\ll c$.
Para proyectiles fotónicos en el límite $u_o\rightarrow c$, nos queda $d^2z/dt^2\approx -[\partial_z\Phi_g + \partial_z\Psi_g]$
Concluimos entonces que un potencial espacial del mismo orden de magnitud que el temporal $\Psi_g\approx\Phi_g$ serviría de base para un modelo que explique la doble deflexión observada para los rayos de luz.

Avance del perihelio orbital:
Destacamos que esta nueva fuerza proporcional a v^2/c^2, incluso con valores $v\ll c$, puede generar efectos significativos si se acumula durante décadas y siglos. En los cálculos que presentamos a continuación mostraremos que esta fuerza también aporta la cantidad que nos estaba faltando al estimar la precesión del perihelio orbital del planeta Mercurio (cap.6.7.1).



En aquel análisis primario nos daban funciones $\cos(W\varphi)$ con $W^2 \approx 1-2.r_s/r_m$ (desvío de 28 arcseg por siglo), cuando el resultado medido experimentalmente está más cercano a $W^2 \approx 1-3.r_s/r_m$ (~42 o 43 arcseg/siglo)

Partimos de las ecuaciones de movimiento clásicas:

$r^2\dot{\varphi} = cte = \ell = L/m_o$ = se sigue conservando el momento angular

$\ddot{r} - r.\dot{\varphi}^2 = -MG/r^2(1 + \mathbf{r^2.\dot{\varphi}^2/c^2})$ = corrección relativista proporcional a $\mathbf{v^2/c^2}$

Repetimos el cambio de Binet:

$r(t) = 1/u(\varphi)$ →derivamos d/dt (no distinguimos 't' de 'τ')

$\dot{r}(t) = -1/u^2.u'(\varphi).\dot{\varphi}$ →hacemos aparecer el momento angular

$\dot{r}(t) = -1/u^2.u'(\varphi).(\ell/r^2)$

$\dot{r}(t) = -1/u^2.u'(\varphi).(\ell/r^2)$ $\rightarrow r=1/u$

$\dot{r}(t) = -u'(\varphi).\ell$ $\rightarrow$otra derivada d/dt

$\ddot{r}(t) = -u''(\varphi).\ell.\ \dot{\varphi}$ $\rightarrow \dot{\varphi}=\ell/r^2$

$\ddot{r}(t) = -u''(\varphi).\ell^2/r^2$ $\rightarrow r=1/u$

$\ddot{r}(t) = -u''(\varphi).\ell^2.\ u^2$

Sustituimos en la ecuación radial y continuamos operando.

$\ddot{r} - r.\dot{\varphi}^2 = -MG/r^2 - MG/c^2\ .\dot{\varphi}^2$

$-u^2\,u''(\varphi).\ell^2 - r.\ell^2/r^4 = -MG.u^2 - MG/c^2\ .\ell^2/r^4$

$-u^2\,u''(\varphi).\ell^2 - \ell^2.u^3 = -MG.u^2 - MG/c^2\ .\ell^2.u^4$

$u''(\varphi).\ell^2 + \ell^2.u = MG + MG/c^2\ .\ell^2.u^2$

$u''(\varphi)+u(\varphi) = MG/\ell^2 + MG/c^2.u^2$

Nos queda una ecuación diferencial que admite una solución particular $u= u_m$ cte.

No es lineal por causa del término u^2, pero se puede linealizar bajo ciertas hipótesis de aproximación.

Expresamos: $u(\varphi)=u_m + \delta u(\varphi)$

$u(\varphi)=u_m + \delta u(\varphi)$ solución particular + solución homogénea

$u^2(\varphi)\approx u^2_m + 2.u_m.\delta u(\varphi)$ $|\delta u(\varphi)| \ll u_m$ para órbitas cuasi-circulares (poco excéntricas)

$\delta u''(\varphi) + u_m + \delta u(\varphi) = MG/\ell^2 + MG/c^2[u^2_m + 2.u_m.\delta u(\varphi)]$

$\delta u''(\varphi) + \delta u(\varphi)[1 - 2MG/c^2.u_m] = MG/\ell^2 - u_m + MG/c^2[u^2_m]$

El miembro derecho se anula si u_m=solución particular. No vamos a resolver la ecuación cuadrática resultante, simplemente observamos que afecta solo al radio orbital, y dará apenas una pequeña corrección de escala respecto a los cálculos clásicos.

La parte interesante es la homogénea - el miembro izquierdo de la ecuación - porque se asocia a una pérdida de periodicidad: las órbitas no se cierran exactamente al completar un giro $\varphi=2\pi$ y los ejes de la elipse van rotando sutilmente con el tiempo.

La ecuación homogénea es de la forma $\delta u''(\varphi) + W^2.\delta u(\varphi) = 0$, con $W^2= 1 - 2MG/c^2.u_m$

Reconocemos $r_m=1/u_m$ valor medio de la distancia orbital, $r_S =2MG/c^2$=radio de Schwarzschild

Y nos queda $W^2 \approx 1 - r_S/r_m$

En esta sección ignoramos totalmente la afectación métrica temporal y la diferencia entre tiempo propio y tiempo coordenado. El efecto que obtenemos ahora suponemos que es aditivo con el que ya habíamos anticipado en 6.7.1 por argumentos métricos y contemplando la dilatación temporal: $W^2 \approx 1 - 2.r_s/r_m$

La combinación de ambos da $W^2 \approx 1 - 3.r_s/r_m$, que, (salvo por el hecho de que nos restringimos a elipses con muy baja excentricidad) coincide casi exactamente con el calculado por Einstein en 1915 y medido experimentalmente. https://es.wikipedia.org/wiki/Mercurio_(planeta)#Avance_del_perihelio

Estos dos análisis de fuerzas nos muestran que la presencia de una perturbación espacial Ψ_g produce una fuerza extra v^2/c^2 que explica las dos discordancias experimentales apuntadas en el capítulo 6.7.1 y 6.7.2. Podríamos preguntarnos quién sería el causante de este potencial Ψ_g. De acuerdo con la conjetura de simetría formulada al inicio de esta sección 7.2 debería ser la misma masa propia que produce Φ_g; el mecanismo causa-efecto que relaciona $\rho_0 \rightarrow (\Psi_g, \Phi_g)$ se terminará de estudiar en los capítulos 10 y 11.

7.2.3 Métrica de Schwarzschild:

Proponemos el siguiente experimento mental para realizar en los alrededores de una región de escala planetaria con métrica afectada por una masa central dominante 'M':

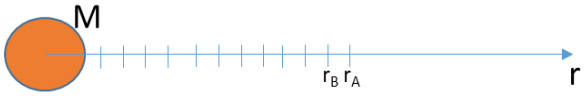
$(c.d\tau)^2 \approx (1-r_S/r).(c.dt)^2 - \beta(r).(dr)^2 - r^2.d\Omega^2$

$\beta(r)$ modela una posible distorsión métrica radial, por ahora incógnita.

Nos situamos inicialmente en cierto radio $r=r_A$, comenzando bien alejados de la masa central 'M', y comparamos la gravedad real con el resultado de simular gravedad mediante un sistema acelerado en vacío →o sea, utilizamos coordenadas Rindler con aceleración c^2/X_A.

Bajamos hasta un cierto $r=r_B$, (por ejemplo reduciendo un 1% $r_B=r_A/1.01$), donde la precisión de la aproximación se empieza a comprometer porque la intensidad gravitatoria cambió apreciablemente.

'A' significa "punto alto en el pozo de potencial" 'B' significa "punto bajo"



Una vez identificado el punto B, lo transformamos en techo A' de una nueva región cuyo piso será otro B'. Así, mediante segmentos $[r_B,r_A]$ vamos cubriendo todo el eje 'r' acercándonos a la masa 'M' creadora de la gravedad. ¿Hasta dónde podemos llegar? Hasta la frontera del astro $r=R_a$ o bien hasta que deje de valer $r>r_S$.

$(c.d\tau)^2 = (1-r_S/r).(c.dt)^2 - \beta(r).(dr)^2 - r^2.d\Omega^2$ es la métrica planetaria que queremos aproximar

$(c.d\tau)^2 = (X/X_\infty)^2.(c.dT)^2 - (dX)^2 - dY^2 - dZ^2$ es la métrica Rindler de aproximación local

Planteamos un cambio de variables que intenta corresponder los términos o factores resaltados con igual color: $X = X_\infty.\sqrt{1-r_S/r}$ $t=T$ $dX/dr = \sqrt{\beta(r)}$

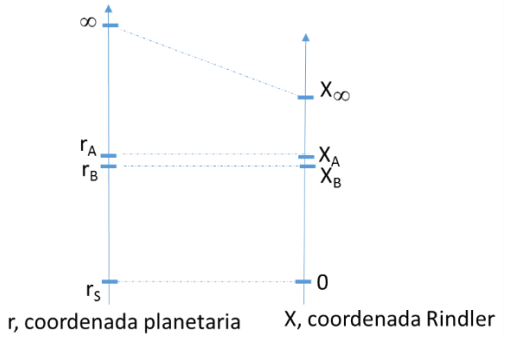
El cambio X(r) en la coordenada espacial acompaña, para todos los radios 'r' dentro de la región $r_B \le r \le r_A$, la evolución del factor de dilatación temporal. $(X/X_\infty)^2.(c.dT)^2 = (1-r_S/r).(c.dt)^2$ $\forall r$ $\forall X$

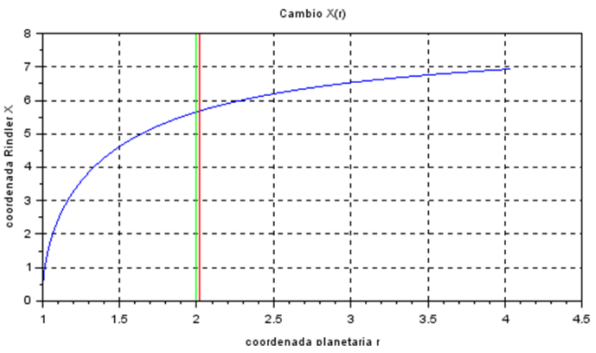
→según la referencia estelar planetaria, los puntos con 'r' menor tienen mayor dilatación temporal por el efecto gravitacional de un campo más intenso.

→según una hipotética referencia inercial en la cual los puntos r=cte se ven acelerados, la dilatación temporal crece al disminuir la coordenada 'X' porque aumenta la aceleración (sección 6.4).

$r=r_\infty$, $X=X_\infty$	es la superficie superior del pozo de potencial donde desaparecen los efectos relativistas de dilatación temporal.
$r=r_A$, $X=X_A=X_\infty.\sqrt{1-r_S/r_A}$	es el extremo del intervalo $[r_B,r_A]$ en que nos ubicamos.
$r=r_S$, $X=0$	es el fondo inferior del pozo, el horizonte de eventos.

La relación X(r) del cambio de variable es fuertemente no lineal y se puede apreciar en la figura:





El tope alto del pozo de potencial está *muy lejos* en el eje 'r' pero está *más cerca* en el eje 'X' .

El intervalo $[r_A,\infty)$ grande debe mapearse en el $[X_A,X_\infty]$ chico.

Los 'dr' para $r>r_A$ y $r\to\infty$ tienen asociado un dX menor que los 'dr' para $r<r_B$ y $r\to r_S$.

Como restringimos la aproximación a una zona muy reducida $r \in [r_B, r_A]$ podríamos pensar que no hay motivo de preocupación. Pero una diferenciación del cambio de variable muestra lo contrario.

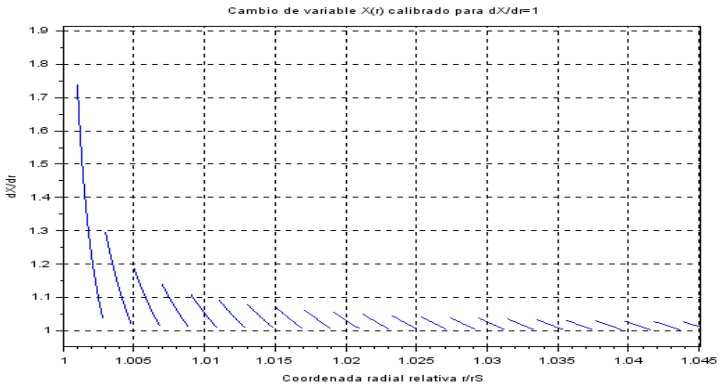
$$X = X_\infty . \sqrt{1 - r_S/r}$$

$$dX/dr = X_\infty / (2\sqrt{1 - r_S/r}\,) . r_S/r^2 \qquad \rightarrow \text{sustituimos } r_S = 2MG/c^2$$

$$dX/dr = X_\infty / c^2 . (MG/r^2) / (\sqrt{1 - r_S/r}\,)$$

La condición $dX/dr = \sqrt{\beta(r)}$ significa que las variaciones dX/dr brindan información sobre la distorsión métrica incógnita $\beta(r)$. La función varía mucho con 'r' y nuestros grados de libertad para ajuste solamente son una constante X_∞ para cada intervalo $[r_A, r_B]$, parece difícil identificar los dX con los dr y sostener la hipótesis $\beta(r)=1=cte$.
En un principio podemos calibrar la constante X_∞ para que valga $dX/dr=1$ en algún punto del intervalo, por ejemplo en $r=r_A$, lo que nos lleva a la expresión: $dX/dr = (r_A^2/r^2) . \sqrt{1 - r_S/r_A} / (\sqrt{1 - r_S/r}\,)$

Aquí observamos que *los dX no son iguales a los dr*. Solo coinciden en un punto $r=r_A$, más allá de ese punto difieren porque la función dX/dr es decreciente con 'r'. Al juntar los resultados de aproximación en múltiples regiones $[r_B\ r_A]$ veríamos una evolución de acuerdo con la siguiente gráfica:



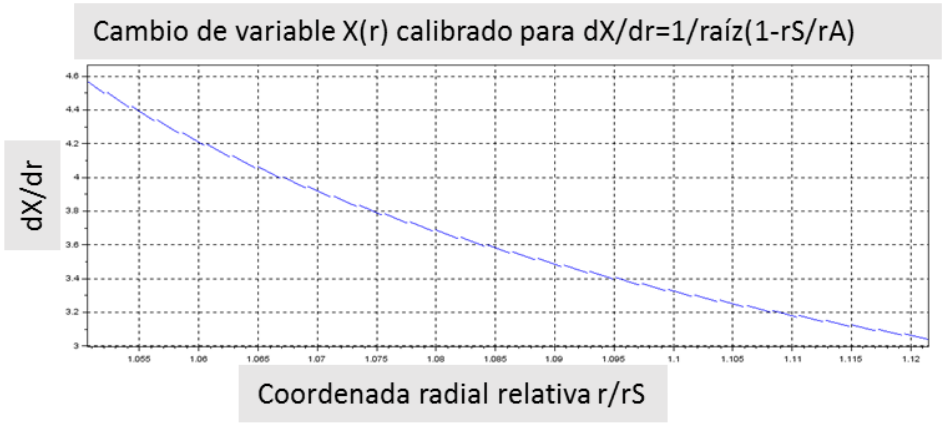
Las discontinuidades no resultan satisfactorias, esto se ve especialmente cuando la distribución de masas permite que nos acerquemos mucho a la coordenada $r=r_S$ antes de chocar contra su frontera $r=R_a$. (O sea, cuando la materia está próxima a formar un *horizonte de eventos* o ya formó uno).
Parece muy severo exigir que dX/dr valga siempre 1 en cada extremo $r=r_A$ cuando la función muestra "intención" de variar tanto ☺ y trepa tan alto para su correspondiente $r=r_B$.
Suponemos más probable la alternativa de que exista una función global continua dX/dr que arranca desde un valor $dX/dr>1$ para $r=R_a$ o $r=r_S$ y que va decreciendo gradualmente hasta llegar a $dX/dr=1$ en $r=\infty$.
Las funciones globales exactas, válidas para todo el rango de distancias radiales 'r', no las podemos encontrar con los conceptos físicos y matemáticos manejados hasta el momento. Solo podemos aventurar alguna conjetura en base a argumentos estéticos de simetría y al hecho de que la función raíz aparece explícitamente al tomar la derivada dX/dr. Ese factor raíz diverge si nos acercamos al límite $r \rightarrow r_S$, es el responsable de que la función dX/dr se dispare.

Volvemos a la expresión: $dX/dr = X_\infty / c^2 . (MG/r^2) / (\sqrt{1 - r_S/r}\,)$

Recalibramos los parámetros $c^2/X_\infty = MG/r_A^2$, compatible con $\beta(r) = 1/(1 - r_S/r)$.

En nuestro intervalo de análisis llegamos a: $dX/dr = (r_A^2/r^2) / \sqrt{1 - r_S/r}\,)$

Con esta calibración, la aproximación por tramos de dX/dr queda mucho más suave. Subsiste un vaivén del orden del 1%, pero eso es debido a que se realizó una partición en una cantidad finita de intervalos donde en cada caso valía $r_A = 1.01 * r_B$. Si partiéramos los intervalos como $r_A = 1.001 * r_B$ el vaivén bajaría al 0.1%.



La unión de los tramos discretos mejora cuanto más nos acercamos al horizonte de sucesos $r \to r_S$.
Cuando r_A y r_B están muy próximos a r_S, el factor raíz domina completamente las variaciones de dX/dr.

→La métrica alterada por β(r) quedaría más simétrica con un factor de contracción de longitudes numéricamente igual al de dilatación temporal: $(c.d\tau)^2 \approx (1-r_S/r)(c.dt)^2 - (dr)^2/(1-r_S/r) - r^2.d\Omega^2$
Se llama métrica de Schwarzschild; en los capítulos 11 y 12 demostraremos que es una solución exacta de las llamadas "ecuaciones de campo de Einstein" (la versión relativista de las ecuaciones de Newton).
→Cuando nos acercamos al horizonte de sucesos, la perturbación espacial crece enormemente y diverge en el límite $r \to r_S+$. En los casos en que la masa 'M' esté totalmente concentrada dentro del horizonte $r<r_S$, *no podemos cruzar hacia esa región* porque el cambio de variable daría valores complejos $X = X_\infty.\sqrt{1 - r_S/r}$.
→En el límite de los campos débiles $r \gg r_S$ reencontramos la estructura que aparecía en la estación rotatoria de 7.2.1: $(c.d\tau)^2 \approx (1+2.\Phi_g/c^2).(c.dt)^2 - (dr)^2.(1-2.\Phi_g/c^2) - r^2.d\Omega^2$, siendo en este caso el potencial $\Phi_g = -M.G/r$.

Reflexión: A lo largo de esta sección siempre asumimos que la perturbación métrica temporal se describía exactamente con las fórmulas de la gravedad de Newton. Podríamos ser un poco más flexibles y pensar en la posibilidad de $-g_{00} = \alpha(r)$, siendo α(r) una función genérica que se aproxima a $\alpha(r) \approx 1-r_S/r$ en las regiones lejanas pero que no necesariamente coincide cuando nos acercamos al astro masivo.
Ahora… si por algún otro argumento (que todavía no tenemos) pudiéramos demostrar que se cumple exactamente $\alpha(r)=1-r_S/r \ \forall r$, entonces las distribuciones de masa "colapsadas" (con la condición $r=r_S$ ocurriendo en el vacío) solo pueden ser descritas si ese α(r) va acompañado por un espacial β(r) inverso que protege contra el cambio de signo en el determinante del tensor métrico.
En la sección 6.7.4 anticipábamos el problema que significaría un cambio de "signatura" en la métrica: en la forma expandida en $d\tau^2$ todos los cuadrados restarían y se obtendría un $d\tau^2<0$, es decir, un tiempo propio complejo para las partículas involucradas. El experimento y los cálculos de esta sección 7.2.3 ilustran un mecanismo por el cual la Física se protege frente a esa situación, desarrollando un coeficiente β(r) que crece a medida que se achica el α(r).
Anticipo: *En el capítulo 10 veremos que el aumento de este coeficiente métrico β(r) está correlacionado con el aumento de la presión interior, a medida que la materia se concentra más en un espacio reducido*.

7.2.4 Coordenadas de Gullstrand-Painlevé:

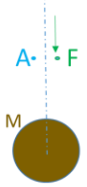
Continuamos el estudio de la gravedad en los alrededores de un astro masivo, presentando un razonamiento que permite llegar por otro camino a las mismas conclusiones que las de la sección anterior.
Cuando se trata de cuantificar el factor de dilatación temporal (el cociente entre el tiempo propio y el tiempo coordenado) observamos la siguiente similitud entre Relatividad Especial 'SR' y Relatividad General 'GR':
$factorSR^2=(1-v^2/c^2)$ $factorGR^2=(1+2\Phi_g/c^2)$
La dilatación temporal gravitatoria se intensifica cuanto más bajamos en el pozo de potencial,
como si nos estuviéramos moviendo más rápido y experimentáramos mayor dilatación temporal cinemática.
Establecemos una equivalencia entre el potencial gravitatorio Φ_g y la velocidad '**v**' que produce el mismo efecto en ausencia de gravedad:

$1-v^2/c^2=1+2\Phi_g/c^2$
$-v^2/c^2=2\Phi_g/c^2$
$v^2/c^2+2\Phi_g/c^2=0$
$v^2+2\Phi_g=0$
$\frac{1}{2}.v^2+\Phi_g=0$ →multiplicamos por masa 'm'
$\frac{1}{2}.m.v^2+m.\Phi_g=0$
$E_{cinet}+U_{pot}=0$

Esta es una ecuación clásica de conservación de la energía, es la que verifica en cada punto de su trayectoria una partícula de masa 'm' que inicia una caída libre desde $r=\infty$, $U_{pot}=0$ y $E_{cinet}=0$ (parte del reposo). El valor de 'v' que satisface esa condición es la velocidad de escape presentada en 6.7.3
Un viajero que acompañe a 'm' resulta entonces un nexo entre el potencial y su velocidad equivalente.
Como no siente la gravedad, tiene sentido aplicarle la Relatividad Especial a su referencial que es inercial.

Imaginamos un observador 'A' en reposo, ubicado en coordenada $r=r_A$ respecto de un astro masivo. En la ubicación de 'A' ocurren eventos periódicos (por ejemplo oscilaciones de un péndulo o circuito electrónico) que se repiten en intervalos $\Delta\tau$ de tiempo propio. Un viajero 'F' en caída libre pasa por la vecindad de 'A' con una velocidad igual a $-v(r)$ → desde su referencial Σ' ve que 'A' está *subiendo* con velocidad $+v(r)$.

Si llamamos T a la coordenada temporal del referencial 'F', podemos utilizar las fórmulas cinemáticas de dilatación temporal de la Relatividad Especial para cuantificar el tiempo propio de los sucesos periódicos que ocurren en 'A': $(d\tau)^2 = (dT)^2.[1-v^2(r)/c^2]$



Métrica en el referencial de caída libre Σ':
$(c.d\tau)^2 \sim (c.dT)^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$

Ignoramos las coordenadas espaciales, conservamos 'T'
para utilizar en la métrica planetaria en lugar de 't'.

a) Métrica de Gullstrand-Painlevé:

La idea de la caída libre radial sirve de base para elaborar una métrica $(dS)^2$ expresada con una coordenada temporal 'T' diferente de la 't' utilizada en secciones anteriores. Aquí 'T' *debe calibrarse para que coincida con el tiempo propio de un observador en caída libre*, lo que no se cumple en la métrica propuesta en 6.7 y tampoco con la modificación β(r) de 7.2.3. Por otro lado, la dilatación temporal gravitatoria para objetos quietos debe corresponderse con las fórmulas recién comentadas.

Estas dos condiciones se cumplen con una propuesta de métrica basada en las coordenadas (cT,r,θ,φ), presentada hace más de un siglo por los autores que dan nombre a esta sección.
Partiendo de nuestra métrica primitiva 6.7, el argumento consiste en pasar de 't' a 'T' y sumar un término mixto, tomando la idea de la estación espacial rotatoria. El término se elige como $2.v(r).dr.dT$ para completar un cuadrado y hacer aparecer un factor $[dr+v(r).dT]^2$ que se anula a lo largo de las trayectorias de caída libre radial. $\rightarrow (dS)^2= -(c.dT)^2(1-r_s/r) + dr^2 + 2v(r).dr.dT + r^2.d\Omega^2$

Identificamos $r_S/r=v(r)^2/c^2$ y en varios pasajes de esta sección trabajaremos con un v(r) genérico, para dejar abierta la posibilidad de que pueda haber otras relaciones con el radio de Schwarzschild y que la igualdad solo sea exacta en el límite clásico $r \gg r_S$. $\rightarrow (dS)^2 = -(c.dT)^2(1-v^2/c^2) + dr^2 + 2v(r).dr.dT + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + v^2.dT^2 + dr^2 + 2v.dr.dT + r^2.d\Omega^2$

Nos queda esta fórmula para analizar: $(dS)^2 = -(c.dT)^2 + [dr + v(r).dT]^2 + r^2.d\Omega^2$ ←Ec. (7.2.4)

- $d\Omega^2$ es un símbolo para referirnos en forma abreviada a la métrica angular $d\theta^2 + sen^2(\theta).d\varphi^2$
- 'r' es la coordenada radial, en principio imaginamos que coincide con la distancia al centro del astro masivo aunque luego veremos que esto está afectado por la propia distorsión métrica que queremos estudiar: *los diferenciales de coordenada pueden no coincidir con las distancias métricas 'dS'.*
- v(r) es la velocidad de escape radial que debe tener una partícula ubicada en 'r' para no frenarse antes de r=∞.
- 'T' es la coordenada temporal de Gullstrand-Painlevé.

Pensamos en el Principio de Equivalencia pero al revés que en la sección anterior. En vez de acelerar una nave para simular gravedad, *nos dejamos caer libremente para simular la ingravidez*.
En estas condiciones, los observadores de caída libre son observadores inerciales y gozan del privilegio de que para ellos se cumplen las leyes de la Relatividad Especial sin perturbaciones gravitacionales. En particular su métrica es la de Minkowski y sus rayos de luz se propagan a velocidad 'c'.

b) Caída libre radial:
Las condiciones que se cumplen durante este experimento son:

- $d\theta=0$, $d\varphi=0$ no hay desplazamiento en las coordenadas angulares
- $dr/dT = -v(r)$. La velocidad radial es numéricamente igual a la de escape pero de signo contrario. Corresponde a la que tendría una partícula que partió del infinito con velocidad nula y fue acelerando progresivamente durante la caída. Es como el caso extremo de una partícula que *quiso escapar* con velocidad=v(r)–δv, pero le faltó un infinitésimo δv y se frenó antes de llegar a r=∞, y cuando retorna al punto de estudio llega con velocidad opuesta = –v(r)+δv (en el límite cuando δv→0).

El valor $(dS)^2$ de la métrica cuantifica el intervalo entre dos eventos del espaciotiempo que pertenecen a la trayectoria de caída libre analizada. Separación espacial=dr, separación temporal=dT, relación dr/dT=–v(r).

Sustituyendo en la ecuación 7.2.4 queda:

$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + [dr + v(r).dT]^2 + r^2.d\Omega^2$ → $dr = -v(r).dT$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + [0]^2 + r^2.0$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2$

Cuando $(dS)^2$ es negativo identificamos $(dS)^2 = -(c.d\tau)^2$, que aquí significa $dT=d\tau$.
→ *La coordenada temporal de Gullstrand-Painlevé mide entonces el tiempo propio de un observador en caída libre desde el infinito, que es lo que buscábamos*.

c) Corte espacial con T=cte:
Si en la ecuación $(dS)^2 = -(c.dT)^2 + [dr + v(r).dT]^2 + r^2.d\Omega^2$ tomamos una *foto* a tiempo T=cte, dT=0, la métrica quedaría puramente espacial $(dS)^2 = [dr]^2 + r^2.d\Omega^2$→ que es la fórmula de la métrica Euclídea para las coordenadas esféricas. Esta es una propiedad interesante y valiosa porque armoniza con la noción de observador inercial privilegiado: su coordenada temporal mide tiempo propio y sus coordenadas espaciales miden métrica Euclídea.

d) Dilatación temporal:
Por lo razonado hasta el momento, la identificación $dT=d\tau$ también se mantendría para una familia más amplia de métricas de la forma $(dS)^2 = -(c.dT)^2 + \mathbf{k(r)^2}.[dr + v(r).dT]^2 + r^2.d\Omega^2$
Habría en principio muchas funciones reales $k(r)\neq 1$ que podrían describir adecuadamente el espaciotiempo, mientras se cumpla el límite clásico $k(r)\rightarrow 1$ cuando $r\rightarrow\infty$.

Sin embargo, las opciones para k(r) se restringen si pensamos en lo que ocurre cuando congelamos las coordenadas espaciales y dejamos solamente fluir el tiempo T.

$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + k^2.[dr + v(r).dT]^2 + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + k^2.[0 + v(r).dT]^2 + r^2.0$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + k^2.v(r)^2.dT^2$ $\rightarrow$ $(dS)^2 = -(c.dT)^2.[1 - k^2.v(r)^2/c^2]$

Recordemos que:

$(dS)^2 > 0$ para intervalos tipo-espacio (*space-like*)

$(dS)^2 < 0$ para intervalos tipo-tiempo (*time-like*) que pueden corresponder a una partícula física

Estamos en el caso negativo donde $(dS)^2 = -c^2.d\tau^2$, y lo que tenemos es una dilatación temporal. Los sucesos que ocurren a r=constante tienen asignado un dT coordenado superior al dτ propio. El observador en caída libre, cuando pasa por la vecindad del 'r' de estudio, ve que esos puntos están moviéndose a velocidad v(r). Por eso a los eventos que ocurren en ese 'r' les asigna un factor de dilatación temporal acorde a las fórmulas de Lorentz de la Relatividad Especial $(1-v^2/c^2)$. Entonces **k=1** es la elección preferida (si fuera k≠1 no se cumpliría la propiedad euclídea mencionada en el punto-c sobre de los cortes espaciales T=cte).

¿Cómo calcular v(r)? Un observador estacionario 'A' considera que este efecto de dilatación temporal tiene un origen gravitatorio, y al aplicar la identificación $1 - v^2/c^2 = 1 + 2\Phi_g/c^2$ llegaría al mismo valor de velocidad de escape que obtuvimos en 6.7.3 basados en argumentos clásicos: $v(r) = \sqrt{2MG/r} = c.\sqrt{r_S/r}$??

Aquí planteamos signos de interrogación para invitar a tomar esta igualdad con precaución, porque en este nuevo contexto significa v(r)=dr/dT, estamos derivando respecto a otra coordenada temporal T≠t.

e) Diagonalización:

$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + [dr + v.dT]^2 + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + v^2dT^2 + 2.v.dr.dT + dr^2 + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2\,(1 - v^2/c^2) + 2.dr.v.dT + dr^2 + r^2.d\Omega^2$

El término cruzado o mixto dr.dT puede generar dificultades conceptuales en cuanto a su interpretación, y los cálculos matemáticos suelen ser más complicados en métricas no-diagonales →esto motiva explorar la posibilidad de diagonalizar esta métrica. (*El nombre "diagonal" alude a que en la visualización matricial del tensor métrico aparecerían coeficientes g_{0r} y g_{r0} fuera de la diagonal, y querríamos eliminarlos*).

En este caso podemos eliminar el término mixto con un cambio de variable, observando que tenemos 2 de los 3 términos de un cuadrado de binomio. Sumamos y restamos un 3er término que completa el cuadrado $[(c.dT\sqrt{\ } - v/c.dr/\sqrt{\ }]^2$, siendo $\sqrt{\ } = \sqrt{1-v^2/c^2}$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2\,(1-v^2/c^2) + 2.dr.v.dT - (v^2/c^2)/(1-v^2/c^2).dr^2 + (v^2/c^2)/(1-v^2/c^2).dr^2 + dr^2 + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -(c.dT)^2\,(1-v^2/c^2) + 2.dr.v.dT - (v^2/c^2)/(1-v^2/c^2).dr^2 + (v^2/c^2)/(1-v^2/c^2).dr^2 + dr^2 + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -[c.dT.\sqrt{1-v^2/c^2} - (v/c).dr/\sqrt{1-v^2/c^2}\,]^2 + (v^2/c^2)/(1-v^2/c^2).dr^2 + dr^2 + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -[c.dT.\sqrt{1-v^2/c^2} - (v/c).dr/\sqrt{1-v^2/c^2}\,]^2 + (v^2/c^2)/(1-v^2/c^2).dr^2 + dr^2 + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -[c.dT.\sqrt{1-v^2/c^2} - (v/c).dr/\sqrt{1-v^2/c^2}\,]^2 + dr^2.[(v^2/c^2)/(1-v^2/c^2) + 1] + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -[c.dT.\sqrt{1-v^2/c^2} - (v/c).dr/\sqrt{1-v^2/c^2}\,]^2 + dr^2/(1-v^2/c^2) + r^2.d\Omega^2$

$(dS)^2 = -(1-v^2/c^2).[c.dT - (v/c).dr/(1-v^2/c^2)]^2 + dr^2/(1-v^2/c^2) + r^2.d\Omega^2$

Definimos una nueva coordenada temporal: $c.dt = c.dT - v/c.dr/(1-v^2/c^2)$

Y la métrica en las nuevas coordenadas queda

$(dS)^2 = -(1-v^2/c^2).(c.dt)^2 + dr^2/(1-v^2/c^2) + r^2.d\Omega^2$

Si aceptamos para la velocidad de escape su valor clásico $v^2/c^2 = r_S/r$, estaríamos repitiendo el mismo resultado que 7.2.3 con $\beta(r) = 1/(1-r_S/r)$.

También repetiríamos el problema de la división por cero cuando $r \rightarrow r_S$.

Esta forma diagonal de la métrica "asusta" un poco si pensamos que el coeficiente métrico radial $g_{rr}=\beta(r)$ diverge en $r\to r_S$.

Para quitarnos la incertidumbre de una división por cero podríamos dejar abierta la posibilidad de que los potenciales gravitatorios tuvieran otra forma, por ejemplo $\Phi_g(r)= -MG/(r+r_S)$.
En el límite lejano de los campos débiles $r\gg r_S$ este hipotético potencial sería indistinguible del de Newton, y tendría la virtud de modelar correctamente el doble ángulo de refracción de la luz comentado en 6.7.2.
Y en la región en que los campos se vuelven fuertes estaría protegiendo contra la división por cero porque la velocidad de escape valdría $v^2=c^2.r_S/(r+r_S)$, siempre $v<c$. No tendríamos que preocuparnos del horizonte de sucesos porque no habría horizonte.

7.2.5 Más allá del horizonte:

¿Qué tal si se cumpliera realmente la asociación $v^2=c^2.r_S/r$?
Entonces nos desprendemos del problema de la división por cero deshaciendo el cambio de variables que condujo a la diagonalización.
Volvemos a la métrica de partida con el término mixto, y nos animamos a cruzar el horizonte con las coordenadas de Gullstrand-Painlevé, tratando de extraer la mayor cantidad de conclusiones útiles.

El tiempo propio en reposo vale según 7.2.4(d) $(c.d\tau)^2 = (c.dT)^2.(1–v^2/c^2)$.
Esto significa que no podemos *habitar* la región detrás del horizonte de sucesos porque $v^2(r)=c^2.r_S/r$, para $r<r_S$ valdría $|v|>c$ y tendríamos un $d\tau$ complejo.
Sin embargo, parece que no habría impedimento para *transitar* por esta región en condiciones de caída libre radial, ya que según la fórmula vista en (a) nos correspondería un tiempo propio real $(c.d\tau)^2 = (c.dT)^2$.

Reflexión: En la sección 7.2.3 afirmábamos que no podíamos cruzar hacia la zona $r<r_S$, pero ahora vemos que aquello era solo una limitación matemática impuesta por las coordenadas (r,t) de Schwarzschild y no era ninguna barrera física sólida.

Los trayectos radiales ($d\theta=0$ $d\varphi=0$) válidos para una partícula física deben cumplir $(c.d\tau)^2>0$

$(c.dT)^2 – [dr + v(r).dT]^2>0$ →extraemos factor $(dT)^2$ y luego lo cancelamos
$(dT)^2.[c^2 – (dr/dT + v)^2]>0$ →factorizamos producto notable
$[c+ dr/dT+v)].[c – dr/dT–v)]>0$

dr/dT debe estar comprendido dentro de dos márgenes: $–c –v(r) < dr/dT < c–v(r)$

El extremo izquierdo y el derecho corresponden al límite de partículas fotónicas con $d\tau=0$:

Luz "*entrante*" con velocidad $v_c = –c–v(r)$
Luz "*saliente*" con velocidad $v_c = +c–v(r)$

Al cruzar el horizonte hacia la región $r<r_S$ nos encontramos con la aparente rareza de que la velocidad de caída libre es numéricamente mayor que 'c': $|v(r)|>c$. Sin embargo, la partícula seguiría cayendo más lentamente que la luz porque la solución de luz entrante tiene velocidad –v–c, no habría ninguna violación.
Otro detalle a tener en cuenta es que para la región $r<r_S$, la cota superior de dr/dT es negativa: $c–v<0$.
Lo que implica que no existen soluciones realmente salientes (a pesar del nombre) y solo hay soluciones entrantes. Ni partículas ni rayos luminosos pueden escapar del interior de la región $r<r_S$.
La solución de signo (+) que llamamos *saliente* podría corresponder al pedido de auxilio que emitiría una nave que cruzó el horizonte de eventos. La luz se alejaría de la nave, pero desde el referencial planetario seguiría cayendo hacia el interior del agujero, más lentamente que la nave.
→Concluimos que esta métrica de Gullstrand-Painlevé, con la identificación $v^2=c^2.r_S/r$, modela una gravedad que se comporta en forma parecida a las gravedades artificiales de 6.7.5, respecto a permitir que bajo ciertas condiciones pueda existir materia y luz detrás del horizonte. Condiciones que podrían describirse como "*dejarse llevar*", en un caso por el giro y en otro caso por la caída hacia 'r' más bajo.

Reflexiones:
Tenemos entonces dos propuestas métricas, que en realidad son la misma porque se obtienen una a partir de la otra mediante un cambio de coordenadas.
Están describiendo al mismo espacio-tiempo físico: masa 'M', radio R_a, simetría esférica.

Forma de Gullstrand-Painlevé: $(dS)^2 = -(c.dT)^2 + [dr+c.\sqrt{r_S/r}\ dT]^2 + r^2.d\Omega^2$

Forma diagonal Schwarzschild: $(dS)^2 = -(1-r_S/r).[c.dt]^2 + dr^2/(1-r_S/r) + r^2.d\Omega^2$

Ambas son muy parecidas a nuestra propuesta métrica de 6.6.5 y 6.7.1, con muy leves modificaciones:

- en el primer caso se utiliza otra coordenada temporal $T \neq t$ donde la única diferencia es el agregado de un término mixto dr.dT.
- En el segundo caso hay un coeficiente radial $\beta(r) \neq 1$ multiplicando a dr^2.

Las diferencias, aunque parecen mínimas, tienen una importancia conceptual.
Porque resuelven dos problemas preocupantes que tenía nuestra métrica 6.7.1:

- la anulación del determinante métrico en $r=r_S$
- y el cambio de signatura en $r<r_S$.

El coeficiente $g_{00}(r)$ cambia de signo en $r<r_S$, y si fuera $g_{rr}(r)=1$ como planteábamos inicialmente en 6.7, la métrica cambiaría una propiedad importante llamada signatura: pasaría de –,+,+,+ (3 valores propios positivos, 1 negativo) a +,+,+,+ (4 valores propios positivos) →las 4 coordenadas serían tipo-espacio y ¡*no habría coordenada temporal*!
¿Qué repercusión física puede tener esto? En la expresión $(dS)^2$ como suma de cuadrados los 4 diferenciales coordenados sumarían, mientras que en su opuesto $(d\tau)^2$ los 4 cuadrados restarían y no podría existir materia con $d\tau$=real.

Con $g_{rr}(r)=1/(1-r_S/r)$ no ocurre este cambio de signatura.
El determinante del tensor métrico no diverge ni se anula porque depende del producto constante $g_{00}.g_{rr}=-1$.
En el capítulo 8 haremos una introducción a la Geometría Diferencial y allí quedará establecido que es importante que la matriz métrica tenga determinante no nulo, porque eso asegura la posibilidad de definirle un tensor métrico inverso.

Los razonamientos basados en las coordenadas de Gullstrand-Painlevé nos sugieren que el límite $r=r_S$ no es una barrera física sólida infranqueable, es posible atravesarla (en un solo sentido) y extender los análisis hacia la región de espaciotiempo correspondiente a $r<r_S$.
Esta región también se podría analizar utilizando las coordenadas de Schwarzschild, re-interpretando:

t=coordenada espacial "*spacelike*" porque $-(1-r_S/r).(cdt)^2$ suma en la métrica expandida $(dS)^2$.
r=coordenada temporal "*timelike*" porque $(dr)^2/(1-r_S/r)$ resta en la forma cuadrática expandida $(dS)^2$.

Es algo "raro" y requiere un gran esfuerzo de abstracción. Es cierto que la Teoría de la Relatividad apunta a formular las leyes de una manera que no dependan del conjunto de coordenadas elegidas. Pero también es cierto que en este trabajo estamos recién abordando la disciplina por primera vez. Preferimos dejar para estudios más avanzados los sistemas de referencia en los que una coordenada se llama con la letra 't' pero en realidad no es un tiempo; y otra coordenada se llama 'r' pero no es un radio.

Discusión:
En los capítulos 11 y 12 comprobaremos que estas métricas son soluciones exactas de las Ecuaciones de Campo de Einstein, válidas en el vacío que rodea una distribución de masa estática con simetría esférica.
Por el momento no tenemos argumentos para aceptar su exactitud porque nos faltan herramientas que justifiquen la totalidad los pasos realizados.

Por un lado, el cambio de variable necesario para la diagonalización resulta difícil de interpretar:
$dt = dT - v/c^2.dr/(1-v^2/c^2)$

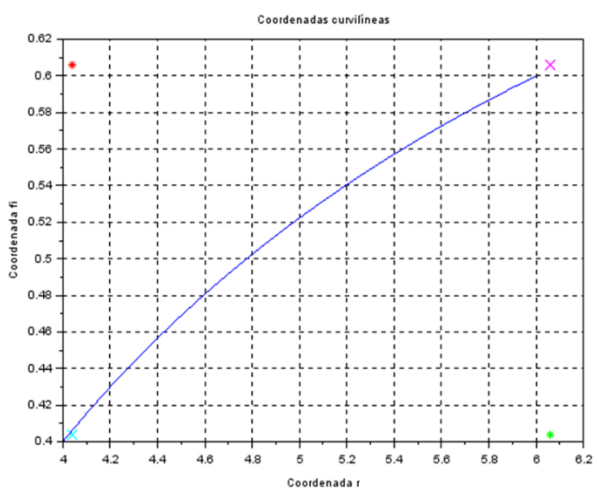
Es como una transformación de Lorentz con velocidad v(r), pero aplicada únicamente a la coordenada temporal y con un factor levemente diferente del gamma.

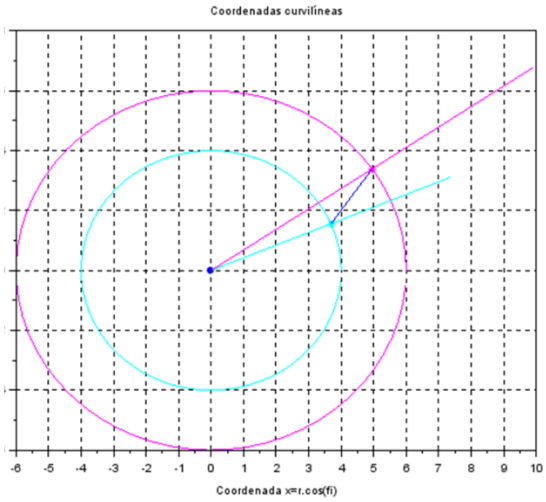
Por otro lado, la identificación $v^2(r)=c^2.r_S/r$ se apoyó en argumentos clásicos de la Física Newtoniana.
A los efectos de los próximos capítulos, si se presenta la ocasión de tener que utilizar los resultados de esta sección, podríamos seguir una política más conservadora y afirmar simplemente que la métrica diagonalizada tendría una forma general: $(dS)^2 = -\alpha(r).(c.dt)^2 + \beta(r).dr^2 + r^2.d\Omega^2$,
donde valdrían $\alpha(r)=1-v^2/c^2$, $\beta(r)=1/(1-v^2/c^2)$, $\alpha.\beta=1$,
y habría lugar para contemplar otros potenciales y velocidades de escape diferentes de los clásicos.
(*Anticipo: en el capítulo 12 veremos una forma $\alpha(r)\approx 1-r_S/r+r_q^2/r^2$ para un astro cargado eléctricamente*)

Incluso podríamos aumentar la precaución y conservar solo la forma válida para distancias lejanas y campos débiles: $\alpha=1+2\Phi/c^2$, $\beta=1-2\Psi/c^2$, $\Psi\approx\Phi$
En tal caso ‘α’ y ‘β’ no serían exactamente inversos, su producto sería casi unitario $\alpha.\beta \approx 1$ y la diferencia sería un infinitésimo de orden (Φ^2/c^4), insignificante para escenarios clásicos.

7.3 Curvatura y métrica.

Veremos cómo las perturbaciones métricas pueden interpretarse en términos de la curvatura. Como primer ejemplo pensamos en un "mapa" de coordenadas (r,φ) donde nos planteamos el objetivo de encontrar el camino mínimo entre dos puntos A=celeste y B=magenta, marcados con cruces en la figura izquierda:





La métrica elegida para este ejemplo es $(dS)^2 = (dr)^2 + r^2.(d\varphi)^2$
La fórmula indica que los recorridos dφ pesan más cuanto mayor es la coordenada 'r', por tal razón es más corto recorrer primero el tramo Δφ por r=4, pasando por el punto rojo, respecto a lo que sería pasar primero por el punto verde y recorrer luego el tramo Δφ por r=6. Mediante cálculo numérico se puede deducir el camino de métrica mínima, que no es la recta diagonal del cuadrilátero sino una curva azul que se acerca un poco más al vértice rojo que al verde. El hecho de obtener curvas en lugar de rectas es un primer indicio de que estamos lidiando con fenómenos de curvatura.

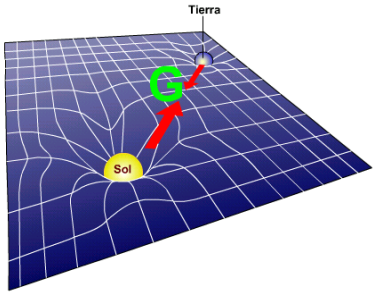
Estos mismos resultados se pueden visualizar mejor con ayuda del cambio de variable x=r.cosφ y=r.senφ que convierte la métrica en cartesiana $(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$
En el nuevo "mapa" de la figura derecha, luego del cambio de variable (x,y), el camino mínimo es la línea recta. Los que son curvos ahora son los lugares geométricos que tienen constante alguna de las coordenadas anteriores: en este caso tenemos las rectas por el origen φ=cte y los círculos con centro en el origen r=cte. Las coordenadas 'r', 'φ' son un caso particular de las llamadas "coordenadas curvilíneas". Se observa que en estos sistemas de coordenadas los vectores base cambian de inclinación al movernos de un punto a otro.

Como segundo ejemplo pensamos en la métrica $(dS)^2=R^2.d\theta^2+R^2.sen^2\theta.d\varphi^2$ basada en las coordenadas θ, φ. En este caso no es posible ningún cambio de variables que la convierta globalmente en cartesiana, se dice que las métricas de este tipo poseen una *curvatura intrínseca*.
Si queremos visualizar gráficamente las distorsiones métricas precisamos una dimensión adicional. Aquí la visualización más sencilla se logra en 3 dimensiones, identificando a la coordenada 'θ' con el ángulo de colatitud y a 'φ' con el azimut de una superficie esférica de radio 'R'.

Algo similar es lo que ocurre en el espacio-tiempo relativista afectado por gravedad, donde la presencia de objetos masivos influye en que la métrica se aparta de la de Minkowski y se observan los fenómenos de caída libre acelerada, curvatura de los rayos de luz, efecto Doppler, dilatación temporal y deriva geodésica. El ejemplo-1 (r,φ) es similar al espacio Rindler: *parece* gravitatorio porque la métrica está alterada, y se observan todos los fenómenos anteriores, salvo la deriva geodésica que resulta nula. Un cambio de variable revela que solo se trata de un espacio Minkowski *plano* descrito en otras coordenadas; no hay ninguna masa perturbante. En cambio el ejemplo-2 (θ,φ), con curvatura intrínseca, es análogo a una gravedad real creada por masas físicas. Se observan todos los fenómenos incluido el de desviación geodésica. No hay forma de "aplanar" las coordenadas, salvo localmente en pequeñas regiones.

7.3.1 Modelo bidimensional:

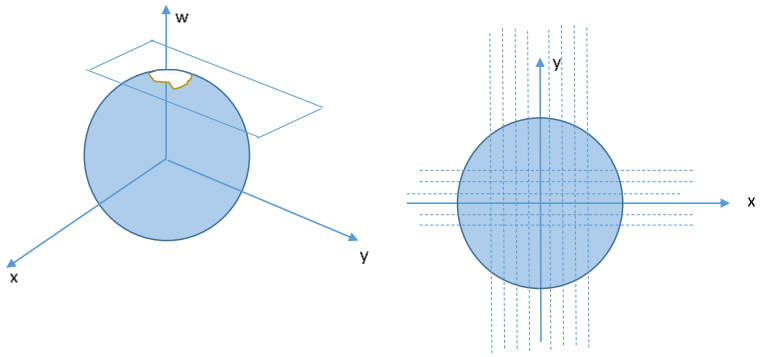
En Wikipedia https://es.wikipedia.org/wiki/Curvatura_del_espacio-tiempo aparece la siguiente imagen que busca servir como ayuda visual para entender mejor las distorsiones métricas del espacio-tiempo.



Describimos los fenómenos de nuestro mundo mediante coordenadas (ct,x,y,z) o (ct,r,θ,φ), y observamos que las trayectorias de la luz no son rectas según nuestras coordenadas. Como explicación podemos imaginar que vivimos en un mundo *curvo*; esa curvatura recién la veríamos en dimensiones adicionales: precisamos como mínimo una quinta dimensión.
La figura muestra que una masa fuerte, por ejemplo el Sol, *hunde* el tejido de espacio-tiempo que lo rodea forzando a que los planetas como la Tierra orbiten a su alrededor. De manera similar la Tierra también produce una deformación local, de menor magnitud, que es percibida por la Luna y los satélites artificiales.
Esta imagen apunta a describir en forma cualitativa y semi-cuantitativa el hecho de que la perturbación aumenta con la masa 'M' y disminuye cuando nos alejamos de 'M'. La deformación se cuantifica con el hundimiento, su derivada primera o gradiente (inclinación) y sus derivadas segundas (curvatura).
El hecho de que todos los cuerpos tengan la misma aceleración gravitatoria en un cierto punto del espacio queda bien reflejado por este modelo: se trata de una propiedad geométrica local que no depende de la masa de prueba pasiva 'm minúscula' ubicada en el sitio, de lo que sí depende es de la masa activa 'M mayúscula' generadora de gravedad.

Es difícil imaginar y representar gráficamente a una hipersuperficie de 4 dimensiones embebida en un espacio de 5 dimensiones, y más todavía si una de las dimensiones es temporal.
En la figura anterior de Wikipedia se congelaron en valores constantes 2 de las coordenadas (t=cte y $\theta=\pi/2$), y se tomó una especie de foto "*instantánea*" con las restantes 'r', 'φ' y una 5ta dimensión 'w'.

Podemos seguir una estrategia similar: sacrificar 2 dimensiones para al menos tener acceso a una descripción cualitativa y cuantificable de los detalles métricos.



Para simplificar los cálculos y las figuras pasamos momentáneamente a estudiar lo que ocurriría si supusiéramos que nuestro mundo es comparable a la superficie de una esfera de radio R_c. Sería un mundo bidimensional, con n=2 grados de libertad (x,y).
La curvatura la concebimos agregando una 3ra dimensión w, imaginando que nuestra superficie está *embebida* dentro de un espacio de dimensión n+1 (x,y,w).

En el nuevo espacio n+1 dimensional, la superficie que ocupamos es el lugar geométrico $x^2+y^2+w^2=R_c^2$.
La métrica es la euclideana, $(dS)^2 = (dx)^2+(dy)^2+(dw)^2$
El *polo* del mundo es el punto x=0, y=0, que corresponde a donde la cáscara corta el eje $\vec{w}$.
El plano tangente a la esfera en ese punto es el plano $w=R_c$.

Toda superficie con variaciones *suaves* es aproximable mediante un plano en una pequeña región.
En nuestro caso, las coordenadas (x,y) del plano tangente pueden servir para ubicarnos dentro de la esfera, en los alrededores de un pequeño casquete polar donde $x^2 \ll R_c^2$, $y^2 \ll R_c^2$.
Para situarnos en el punto de vista de un habitante de la superficie, que conoce únicamente las coordenadas (x,y), debemos eliminar la variable *foránea* 'w'. Despejamos: $w=\sqrt{R_c^2-x^2-y^2}$ y diferenciamos:

$$dw = 1/[2.\sqrt{\ }].(-2x.dx - 2y.dy)$$
$$dw = -1/(2w).(2x.dx + 2y.dy) \quad \rightarrow \quad dw = -1/w.(x.dx + y.dy)$$

Luego elevamos al cuadrado $\rightarrow (dw)^2 = 1/w^2.[x^2.(dx)^2 + 2.x.y.dx.dy + y^2.(dy)^2]$
La región en la que tiene validez aproximar el casquete curvo por un plano se describe por la condición $x^2 \ll R_c^2$, $y^2 \ll R_c^2$.
Superficies poco curvas (R_c grande) resisten un alejamiento mayor antes de distorsionar la métrica en forma apreciable. Superficies muy curvas (R_c chico) solo pueden ser aproximadas por planos en entornos chicos.

Para la región de validez aproximamos $w \approx R_c$, resultando:

$$(dw)^2 \approx 1/R_c^2.[x^2.(dx)^2 + 2.x.y.dx.dy + y^2.(dy)^2]$$

Al sustituir $(dw)^2$ en $(dS)^2 = (dx)^2+(dy)^2+(dw)^2$ nos quedan residuos que distorsionan la métrica en nuestras variables (x,y): $(dS)^2 \approx (dx)^2.[1+x^2/R_c^2] + 2.x.y/R_c^2.dx.dy + (dy)^2.[1 + y^2/R_c^2]$

Visualizamos en forma de matriz a las componentes del tensor métrico:

$$\begin{bmatrix} 1+x^2/R_c^2 & x.y/R_c^2 \\ x.y/R_c^2 & 1+y^2/R_c^2 \end{bmatrix}$$

Propiedades que se desprenden de este ejemplo:

- La métrica es esencialmente euclideana en el punto de evaluación x=0, y=0, que sería el punto de contacto entre la superficie y el plano tangente. Allí el tensor métrico es la matriz identidad.
- Cuando nos apartamos (x,y) respecto al punto de tangencia, observamos desviaciones de la métrica euclideana. Tales desviaciones crecen en forma cuadrática respecto a las distancias que nos alejamos, lo que implica que las derivadas primeras de la métrica también son nulas.
- Las derivadas segundas de los componentes del tensor métrico $g_{\lambda\mu}$, evaluadas en el punto de aproximación, ponen de manifiesto una cantidad del orden de $1/R_c^2$ llamada "curvatura de la superficie". *La curvatura de una curva tiene dimensiones $1/R_c$ y la de una superficie $1/R_c^2$.*
- Para no perder generalidad debemos contemplar la posibilidad de extraer información útil de todas las posibles derivadas segundas en cualquier pareja de variables αβ y de cualquier componente $g_{\lambda\mu}$ del tensor métrico, algo como $\partial_\alpha \partial_\beta g_{\lambda\mu}$. Lo que nos da la pista de que la curvatura podría requerir para su descripción una magnitud tensorial de 4 índices λμαβ. (*Lo confirmaremos en los capítulos 8 y 9*).
- En un escenario razonablemente isotrópico no hay ninguna dirección privilegiada, todas son susceptibles de experimentar los efectos de la curvatura.

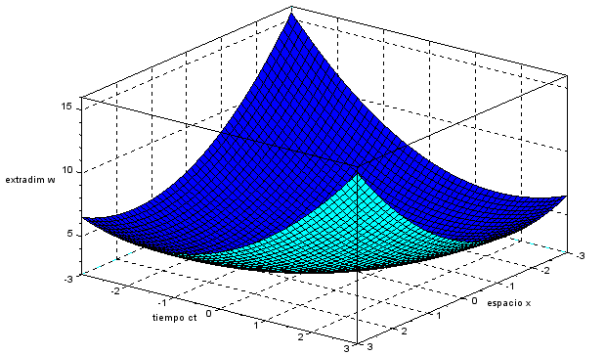
Esto es similar a lo que estamos observando en Relatividad General. Los primeros acercamientos al tema nos ponían de manifiesto perturbaciones en la parte temporal, a partir de 7.2 empezaron a aparecer en la parte espacial y ahora las tratamos de entender con ayuda de este modelo de curvatura.

Surge una complicación al intentar buscar una interpretación geométrica de las coordenadas temporales, porque la métrica de partida sería la de Minkowski: $(dS)^2 = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dw)^2$ y las distancias del dibujo no son las distancias métricas. Pero desde el punto de vista matemático no hay ninguna dificultad nueva, podemos intentar repetir los cálculos del casquete esférico con una "superficie" de ecuación:

$$w = R + (R^2 + x^2 + ct.x + ct^2)/R$$

El "plano tangente" en x=0 ct=0 se obtiene diferenciando:

Rdw = 2x.dx + ct.dx + x.dct + 2ct.dct
Rdw = (2x+ct).dx +(x+2ct).dct



$R^2dw^2 = (2x+ct)^2.dx^2 + 2(2x+ct).(x+2ct).dx.dct + (x+2ct)^2.dct^2$

En la métrica original conservamos dx, dct, que pasan a medir ahora desplazamientos sobre el plano tangente. Y los residuos dw^2 representan perturbaciones:

$(dS)^2 = -(c.dt)^2 + (dx)^2 + (dw)^2$
$(dS)^2 = -(c.dt)^2 + (dx)^2 + (2x+ct)^2/R^2.dx^2 + 2(2x+ct).(x+2ct)/R^2.dx.dct + (x+2ct)^2/R^2.dct^2$
$(dS)^2 = [-1+(x+2ct)^2/R^2](c.dt)^2 + [1+(2x+ct)^2/R^2](dx)^2 + 2(2x+ct).(x+2ct)/R^2.dx.dct$

Las perturbaciones temporales apuntan en el sentido de una "dilatación de tiempos" y las perturbaciones espaciales se perfilan como "contracción de longitudes".

El tensor métrico perturbado queda:

$$\begin{bmatrix} -1+(x+2ct)^2/R^2 & (2x+ct)(x+2ct)/R^2 \\ (2x+ct)(x+2ct)/R^2 & 1+(2x+ct)^2/R^2 \end{bmatrix}$$

La métrica es exactamente la de Minkowski en el punto (x=0 ct=0) donde la superficie hace contacto con su "plano tangente". Al apartarnos un poco de ese punto ($|x| \ll R$, $|ct| \ll R$) vemos desviaciones métricas que son infinitésimos de segundo orden en los cocientes (x/R), (ct/R).
Los desplazamientos pueden ser en el espacio 'dx' o en el tiempo 'cdt'. Y la afectación métrica puede ocurrir en cualquier coordenada, tanto espacial como temporal.

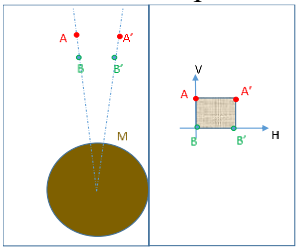
7.3.2 Métrica variable en el tiempo:

Antes de que empezáramos a contemplar ninguna alteración en la métrica espacial, habíamos llegado a una primera propuesta métrica compatible con los avances hasta la sección 6.6:

$(dS)^2 = -(1+2.\Phi_g/c^2)(c.dt)^2 + dx^2+dy^2+dz^2$

A pesar de que esta métrica es imperfecta, nos sirve para ilustrar el hecho de que un cambio de coordenadas sencillo hace aparecer perturbaciones métricas espaciales variando en el tiempo. El ejemplo que aquí presentamos tiene interpretación física y busca el objetivo de complementar las imágenes geométricas recién introducidas.
Supongamos 2 puntos A y B en la vecindad de una masa 'M' de escala planetaria.

A es el punto "alto", B es el punto "bajo". $r_B=r_o$, $r_A=r_B+dv$, $dv \ll r_o$.



r_A y r_B son sus respectivas distancias a la masa central M.

Supongamos también 2 puntos compañeros, A' a igual altura que A, B' a igual altura que B.
Desde cada uno de los 4 puntos se inician 4 caídas libres A, B, A', B'.

Una de las manifestaciones del Principio de Equivalencia es que los referenciales en caída libre se pueden considerar como inerciales, despojados de gravedad, mientras los apartamientos sean pequeños.
De acuerdo con la interpretación geométrica que estamos manejando, buscamos una posible relación entre el referencial de caída libre y las coordenadas cartesianas de un plano tangente a la superficie curva.

En t=0 los referenciales Σ_A y Σ_B son ambos aproximadamente inerciales y no tienen movimiento respecto al sistema planetario Σ, lo que implica que tampoco tienen movimiento relativo entre ellos.
Si aplicamos el concepto de *sistema privilegiado* de la Relatividad Especial, podemos definir un referencial conjunto Σ' que contenga a los 4 puntos, con coordenada h=horizontal, v=vertical. En este referencial Σ', los puntos A,B,C,D mantienen constantes sus coordenadas h,v.

A(h=0, v=dv) A'(h=dh,v=dv)
B(h=0, v=0) B'(h=dh,v=0)

La diferencia coordenada en horizontal es dh y en vertical es dv.

En Relatividad General sabemos que ese *privilegio* dura poco en el espacio y en el tiempo, porque la aceleración de la caída libre es más intensa en B que en A y hay un sutil alejamiento.

$g_A = -M.G/r_A^2$ $g_B = -M.G/r_B^2$

Métrica vertical:
La distancia de separación vertical evoluciona en el tiempo como:

$dS_V \approx dv + ½ .(g_A - g_B).t^2$
$\approx dv + ½.M.G.(1/r_B^2 - 1/r_A^2).t^2$
$\approx dv + ½.M.G/r_A^2/r_B^2.(r_A^2 - r_B^2).t^2$
$\approx dv + ½.M.G/r_A^2/r_B^2.(r_A - r_B).(r_A + r_B).t^2$
$\approx dv + ½.M.G/r_A^2/r_B^2.dv.(r_A + r_B).t^2$
$\approx dv + ½.M.G/r_o^4.dv.(2.r_o).t^2$ →en el límite en que A,B son muy próximos
$\approx dv + M.G/r_o^3.dv.t^2$
$dS_V \approx dv.[1 + M.G/r_o^3.t^2]$

En los cálculos métricos siempre aparecen distancias elevadas al cuadrado, por lo que escribimos

$dS_V^2 \approx dv^2.[1 + 2.M.G/r_o^3.t^2]$

La interpretación es la siguiente: la diferencia coordenada entre techo y piso es "dv"=constante, porque así elegimos arbitrariamente las coordenadas en el referencial de caída.
Pero esta diferencia coordenada *pesa* diferente a los efectos de la distancia real, o sea la métrica.
Dicho de otra manera: la distancia *real* o propia, "dS_V", aparece en nuestro referencial coordenado contraída como "dv". Similar a la contracción de longitudes por efecto cinemático en Relatividad Especial.

Métrica horizontal:
La distancia de separación horizontal evoluciona en el tiempo como:

$dS_H \approx r_A . \Delta\varphi$
$dS_H \approx (r_o + ½.g.t^2).\ dh/r_o$
$dS_H \approx (1 + ½.g/r_o.t^2).\ dh$
$dS_H \approx (1 - ½.M.G/r_o^3.t^2).\ dh$ → $dS_H^2 \approx dh^2.(1 - M.G/r_o^3.t^2)$

Aquí la distorsión no se interpreta como una contracción de longitudes sino como lo opuesto.

Métrica temporal:
Deberíamos definir otra coordenada temporal $T \neq t$ que de alguna manera se calibre con el tiempo propio de los viajeros en caída libre, que contemple el hecho de que están cayendo hacia zonas donde la dilatación temporal gravitatoria es más fuerte. Ya trabajamos bastante con alteraciones temporales, así que no ofrecemos aquí los detalles matemáticos exactos. Simplemente enunciamos que el resultado final consiste en una métrica:

$dS^2 \approx dS_H^2 + dS_V^2$ + términos temporales xxx $\approx dh^2.(1–M.G/r_o^3.t^2) + dv^2.(1+2.M.G/r_o^3.t^2)$ + xxx

El cambio de variables acelerado tiene un parecido con la aproximación de una superficie por plano tangente, en el sentido en que nos llevó a una métrica espacial casi euclídea.

El paralelismo no es total, porque podría utilizarse otro conjunto de coordenadas en los cuales la propiedad euclídea no sería tan evidente.

En ambas direcciones, vertical y horizontal, las desviaciones en relación a la métrica euclídea son del mismo orden de magnitud y proporcionales al cuadrado de los alejamientos espacio-temporales respecto al punto del espacio-tiempo en que hicimos la aproximación de referencial inercial.

En este caso los *alejamientos* son en la coordenada temporal 'ct'.

Si llamamos g_{HH} y g_{VV} a los coeficientes de la métrica, tenemos:

$\partial^2 g_{HH}/\partial(ct)^2 = -2.MG/(c^2.r_o^3)$

$\partial^2 g_{VV}/\partial(ct)^2 = +4.MG/(c^2.r_o^3)$

Tal como vimos en otros ejemplos, las derivadas segundas de los coeficientes métricos ponen de manifiesto la propiedad de curvatura.

La misma *receta* podríamos aplicarla al sistema original de coordenadas planetarias donde era:

$g_{oo} = -(1+2.\Phi_g/c^2)$

$\partial^2 g_{oo}/\partial(r)^2 = -2/c^2.\ \partial^2\Phi_g/\partial r^2 = 4.MG/(c^2.r_o^3)$

$\partial^2\Phi_g/\partial r^2$ es un indicador importante de que estamos en presencia de curvatura.

No basta que exista una derivada primera porque eso representaría simplemente una "g" local $|g|=|\partial_r\Phi_g|$

Si fuera $\partial_r g=0$ estaríamos en una situación de "g" uniforme y podríamos utilizar para toda nuestra región de estudio el mismo conjunto de coordenadas Rindler con la misma "g", y en ese caso no habría afectación métrica espacial.

Es la variación de "g" $\partial_r g$ o derivada segunda del potencial $\partial_r^2\Phi_g$ la que se asocia a los efectos de curvatura.

Reflexión: Esta caída libre desde A,A',B,B' tiene aspectos en común con lo visto en la sección 6.8 donde adelantábamos que el experimento de caída libre grupal (múltiples partículas) era adecuado para distinguir:

→gravedad genuina, es decir, espaciotiempo curvo

→o imitación de gravedad, es decir, espaciotiempo plano descrito con coordenadas curvilíneas.

Tenemos múltiples ejemplos que muestran hasta qué punto el espacio y el tiempo tienen rol similar.

Basta un cambio de referencia para "mezclar" los efectos.

En este artículo fueron apareciendo los efectos en este orden:

→distorsión en la métrica temporal variable según apartamientos espaciales

→distorsión en la métrica espacial variable según apartamientos espaciales

→distorsión en la métrica espacial variable según apartamientos temporales.

7.3.3 Principio de equivalencia "inverso":

No se trata en realidad de un nuevo principio.

Con el nombre "inverso" nos referimos a una forma inversa de ver el mismo fenómeno.

→Enunciado directo: La aceleración puede simular gravedad.

→Enunciado inverso: La caída libre simula ingravidez.

Este enfoque significa que en cada punto del espacio-tiempo descrito con coordenadas X^α existe al menos un cambio de variables que nos lleva a un referencial de coordenadas y^i llamadas "coordenadas localmente inerciales". $J^\alpha{}_i=\partial X^\alpha/\partial y^i$ es el jacobiano del cambio de variables.

$dS^2 = g_{\alpha\beta}dX^\alpha dX^\beta$ →cambio $dX^\alpha=J^\alpha{}_i dy^i$, $dX^\beta=J^\beta{}_j dy^j$

$dS^2 = g_{\alpha\beta}J^\alpha{}_i J^\beta{}_j dy^i dy^j \approx \eta_{ij}dy^i dy^j$

La métrica pasa a ser "casi Minkowski" en el nuevo referencial, en el entorno del punto de análisis.

$g_{\alpha\beta}J^\alpha{}_i J^\beta{}_j \approx \eta_{ij}$ →representa un doble producto matricial

$[J^*].[g].[J] = [\eta]$ →tomamos determinante

$\det(J^*).\det(g).\det(J) = \det(\eta)$ →igualamos determinante de matrices traspuestas [J] y [J*]

$\det^2(J).\det(g) = -1$

Tenemos entonces otro argumento para justificar que la métrica propuesta tentativamente en la sección 6.6.5 $(dS)^2 = -(1+2.\Phi_g/c^2)(c.dt)^2 + dx^2+dy^2+dz^2$ ***no puede ser válida*** en escenarios que incluyen regiones donde $\Phi_g <- c^2/2$, como es el caso del agujero negro Schwarzschild mencionado en 6.7 que presenta un horizonte de eventos. En esas regiones el determinante del tensor métrico sería positivo, y no habría posibilidad de ningún cambio de variables real con jacobiano real que pudiera convertir la métrica en la de Minkowski.
Las métricas de Gullstrand-Painlevé y de Schwarzschild no sufren este problema del determinante.

- En las coordenadas de Gullstrand-Painlevé, el "salvador" es el término cruzado 2v(r).dr.dT.
- En las coordenadas de Schwarzschild, el "salvador" es el coeficiente multiplicativo $g_{rr}(r) \neq 1$.

7.3.4 Curvas geodésicas:

Los habitantes de un mundo curvo no precisan *salir* a una dimensión desconocida para poder estudiar fenómenos asociados a su curvatura. Pueden realizar experimentos y cálculos con sus propias coordenadas y llegar a los mismos resultados porque toda la información está contenida en la métrica.
Esto es una buena noticia para nosotros, porque a la fecha de redacción de este capítulo (año 2021) todavía no conocemos tecnología para viajar a otra dimensión, y eso no evita que podamos realizar medidas sobre nuestra curvatura. La quinta dimensión podrá ayudar a algunas visualizaciones mentales, pero por ahora no es imprescindible que tenga existencia totalmente real.

Los experimentos descritos con mayor frecuencia son:

- Calcular y/o medir las curvas de distancia mínima llamadas geodésicas y observar que no son rectas.
- Trazar triángulos geodésicos y verificar que la suma de ángulos no da π radianes (180 grados).
- Trazar una circunferencia, medir su radio 'R', medir su perímetro 'L' y confirmar que $L \neq 2.\pi.R$.
- Identificar 2 líneas localmente paralelas y comprobar que en el espacio global su distancia puede aumentar o disminuir.

→Todos estos fenómenos son indicativos de que no estamos en un mundo plano.
Es posible obtener información cuantitativa sobre la curvatura local, según cuánto nos apartamos numéricamente del resultado conocido para geometrías euclideanas.
Aclaración: El nombre "curva geodésica" está inspirado en la disciplina Geodesia, rama de la Geografía encargada de realizar mediciones matemáticas sobre la superficie de la Tierra.

Veamos el ejemplo del casquete esférico en el entorno de un punto polar:

$$(dS)^2 \approx (dx)^2.[1+x^2/R_c^2] + 2.x.y/R_c^2.dx.dy + (dy)^2.[1 + y^2/R_c^2]$$

Imaginamos curvas que recorren la superficie mediante parametrización:

$x=x(s)$ $\quad\quad$ $\dot{x} = dx/ds$
$y=y(s)$ $\quad\quad$ $\dot{y} = dy/ds$

El parámetro 's' que utilizamos en esta sección es la longitud de arco (no el tiempo propio de las partículas relativistas), y el punto encima de las coordenadas significa momentáneamente derivación respecto a este parámetro de longitud de arco. La métrica es:

$$(dS) \approx \sqrt{(dx)^2.[1+x^2/R_c^2] + 2.x.y/R_c^2.dx.dy + (dy)^2.[1 + y^2/R_c^2]}$$

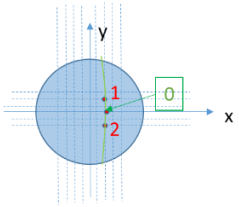
$$(dS) \approx \sqrt{\{\ \dot{x}^2.[1+x^2/R_c^2] + 2.\dot{x}.\dot{y}.x.y/R_c^2 + \dot{y}^2.[1 + y^2/R_c^2]\ \}}\ .ds$$

La distancia entre 2 puntos es la integral de línea de los diferenciales (dS) a lo largo de una trayectoria que une ambos puntos. Debido a la eventualidad de que esta integral varíe con la trayectoria, se define distancia como el valor mínimo posible. $dist = \int dS = \int \sqrt{\ } ds$
Esto es muy similar a la integral de acción de la Mecánica Relativista, salvo que no tiene unidades de energía porque le faltan factores m_o, c. Y la variable en que se integra es una distancia 's' en vez de un tiempo 'τ'.
Los detalles matemáticos son los mismos y podemos concluir que las trayectorias de las partículas materiales son curvas geodésicas en el espacio-tiempo cuadridimensional.

Como ejercicio podemos aplicar una formulación lagrangeana al ejemplo de la esfera:

$$\mathcal{L}(x,y,\dot{x},\dot{y},s)=\sqrt{\dot{x}^2.[1+x^2/R_c^2]+2.x.y\dot{x}.\dot{y}/R_c^2+\dot{y}^2.[1+y^2/R_c^2]} \qquad \sqrt{\ } = 1 \qquad \dot{} = d/ds$$

Ejercicio: Utilizar las ecuaciones variacionales de Euler y Lagrange para calcular la geodésica (línea de métrica mínima o curvatura mínima) que une los puntos 1 y 2 del dibujo.



Las coordenadas son: $(x_1,y_1)=(h,+h)$ $(x_2,y_2)=(h,-h)$

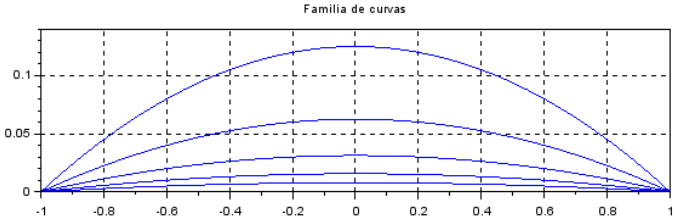
La hipótesis de simplificación es $h \ll R_c$.

Los cálculos deberían conducir al resultado de que la trayectoria óptima no es una recta sino un arco de elipse levemente curvado.

Ejercicio: Se sabe que en la esfera las geodésicas son *círculos máximos* que surgen de intersectar su superficie con planos que pasan por el centro. Utilizar este resultado para salir al espacio n+1 dimensional (x,y,w) y comprobar el resultado del arco de elipse obtenido en el ejercicio anterior.

Observar que la geodésica que une dos puntos cercanos puede interpretarse de dos maneras:

- Camino de distancia mínima.
- Camino de curvatura mínima.



Para curvas en un plano es fácil ver que ambos conceptos son equivalentes.

Curvas sobre una superficie exigen un mayor esfuerzo de interpretación.

Actividad:

Consultar algún libro o página de Internet donde se muestren mapas terrestres distorsionados (*siempre habrá distorsión porque es imposible transportar en forma fiel las distancias desde una superficie curva hacia una hoja plana*). Ejemplo: Why Do Airplane Routes Curve on Maps? | Engineering Infinity [LinkedIn]

Si es posible, conseguir un globo terráqueo para poder visualizar desde otro punto de vista las trayectorias.

7.3.5 Espaciotiempo "*curvo*" en Relatividad:

En la Mecánica Clásica de Newton y Galileo ya se había hecho un intento de reutilizar las ecuaciones dinámicas $\vec{f}=d\vec{p}/dt$ para sistemas acelerados.

El recurso consistía en la inclusión de un término adicional de fuerzas de inercia o ficticias: $d\vec{p}/dt=\vec{f}+\vec{f}_{fic}$

La formulación lagrangeana de la Relatividad cumple este mismo rol. La ecuación de la Relatividad Especial $F_\alpha=dP_\alpha/d\tau$ deja de cumplirse y deben agregarse nuevos términos: $dP_\alpha/d\tau= F_\alpha+\partial_\alpha \mathfrak{L}$

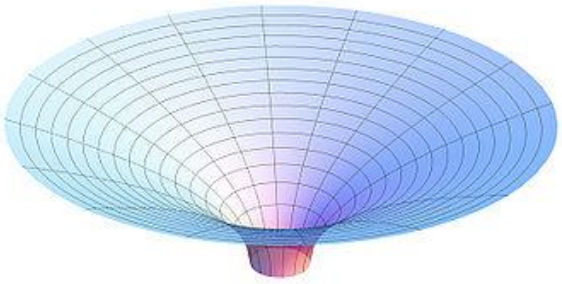
Como curiosidad observamos que esos mismos términos adicionales también deben incluirse cuando describimos nuestras ecuaciones en coordenadas curvilíneas.

En los siguientes capítulos ampliaremos más este concepto. Veremos que los mejores resultados se obtienen quitando las fuerzas ficticias del lado derecho (fuerzas) y pasándolas al lado izquierdo para ser absorbidas dentro de los operadores de derivación. Nos encontraremos con una nueva derivada $D/D\tau$ llamada *derivada covariante* que generaliza a $d/d\tau$.

Lo que llamamos "fuerza gravitatoria" pasará a ser considerada como una pseudofuerza, tan ficticia como las fuerzas de inercia. Ficticia porque se manifiesta por el hecho de ubicarnos en un sistema de referencia no inercial; desaparece cuando nos dejamos ir en caída libre y pasamos a una referencia inercial.

7.3.6 Paraboloide de Flamm:

En muchos sitios (por ejemplo en Wikipedia) se visualiza a la métrica de Schwarzschild mediante dibujos similares al siguiente.[Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9trica_de_Schwarzschild]



Los cálculos que presentamos a continuación intentan justificar el origen de esas gráficas.
Tomamos como punto de partida la métrica de Schwarzschild introducida en 7.2.3:
$(dS)^2 = -(1-r_S/r)(c.dt)^2 + (dr)^2/(1-r_S/r) + r^2.(d\theta^2 + sen^2\theta.d\varphi^2)$
Congelamos el espacio-tiempo en un valor constante de 't', es decir, imponemos dt=0.
Nos queda una región puramente *spacelike*, con métrica definida positiva.
Congelamos también en un valor constante la coordenada $\theta=\pi/2$, $d\theta=0$.
La "rebanada" espacial responde entonces a una métrica simplificada:

$(dS)^2 = (dr)^2/(1-r_S/r) + r^2.d\varphi^2$ →sumamos y restamos lo mismo en el numerador
$(dS)^2 = (dr)^2(1-r_S/r+r_S/r)/(1-r_S/r) + r^2.d\varphi^2$
$(dS)^2 = (dr)^2.(r_S/r)/(1-r_S/r) + dr^2+r^2.d\varphi^2$
$(dS)^2 = (dr)^2.(r_S)/(r-r_S) + dr^2+r^2.d\varphi^2$ →reconocemos la parte euclídea del plano horizontal $dr^2+r^2.d\varphi^2$
$(dS)^2 = dw^2 + dr^2+r^2.d\varphi^2$

Para ayudar a la visualización gráfica definimos una coordenada extradimensional 'w', tal que (r, φ,w) forman un conjunto de coordenadas cilíndricas. Suponemos que nuestra superficie está embebida en esa dimensión adicional y hereda la métrica euclídea de ese espacio. Los puntos de esa superficie cumplen la relación $dw^2=dr^2.(r_S)/(r-r_S)$.

$dw^2=dr^2.(r_S)/(r-r_S)$ →tomamos raíz cuadrada
$dw=dr.\sqrt{r_S}\ /\sqrt{(r-r_S)}$ →tenemos un diferencial exacto de raíz, lo integramos
$w=2.\sqrt{r_S}\ .\sqrt{(r-r_S)}$

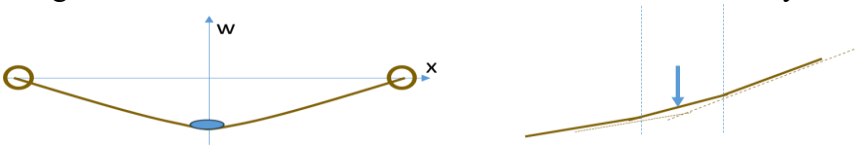
Se forma una superficie de revolución que se llama Paraboloide de Flamm.
Cuando $r \gg r_S$ la dirección asintótica es horizontal y la curvatura tiende a cero. Esto modela el hecho de que la métrica de Schwarzschild tiende a ser plana cuando nos alejamos de la masa causante de la perturbación gravitatoria.
Si la distribución de materia está colapsada y permite que nos acerquemos mucho al horizonte $r=r_S$, allí las paredes del paraboloide se verticalizan. Lo que está ocurriendo es que un 'dr' ínfimo puede significar una distancia métrica inmensa, la coordenada radial 'r' deja de tener significado como medidora de distancia. Sin embargo, quien tiene mucho más significado métrico en esa región es la coordenada extradimensional 'w', porque *$dS \approx dw$ en la vecindad del horizonte*. En el capítulo 12 veremos un conjunto de coordenadas llamadas Kruskal-Szekeres, especiales para describir la vecindad del horizonte de sucesos y que utilizan una variante de esta 'w' con función raíz.

7.4 Modelo mecánico de la gravitación.

En esta sección intentamos traducir a ecuaciones numéricas la idea de los pesos 'M' que curvan el espacio y condicionan las trayectorias de las masas vecinas 'm'.
Advertimos que a pesar del enfoque numérico, en varios momentos se omiten demostraciones rigurosas o se sacrifica precisión matemática con tal de llegar rápidamente a los resultados que se quieren mostrar y que tienen su contra-parte en la Relatividad General.

Cuerda-1D:

Repasamos algunas ideas de deformación elástica, que vamos a precisar en las próximas páginas.
Imaginamos una cuerda elástica tensada desde dos extremos y con un peso apoyado en el medio.



Cada porción 'dx' de la cuerda tiene:

- abscisa x, extensión entre x-dx/2 y x+dx/2
- altura w(x)
- carga externa vertical λ(x).dx, es un apoyo que tiende a hundirla localmente
- masa dm, suponemos que no contribuye a la deformación
- ángulo θ(x), asumimos $\theta \ll 1$ (la figura exagera la inclinación)
- tensión T(x)

El balance horizontal de fuerzas, según el eje $\vec{x}$, es:

$T(x+dx).\cos(\theta+d\theta) - T(x+dx).\cos(\theta+d\theta) = 0$

$d(T.\cos\theta)/dx = 0$

→$T(x)\cos[\theta(x)]=T_o$ constante.

El equilibrio vertical se logra con una diferencia de inclinaciones entre los segmentos vecinos x+dx y x-dx.

$\lambda.dx = T(x+dx).\text{sen}(\theta+d\theta) - T(x-dx).\text{sen}(\theta-d\theta)$

$\lambda = d(T.\text{sen}\theta)/dx$ →sustituimos $T=T_o/\cos\theta$

$\lambda = d(T_o/\cos\theta.\text{sen}\theta)/dx$

$\lambda = d(T_o.\tan\theta)/dx$ →$\tan\theta=dw/dx=w'(x)$

$\lambda = T_o.d(w'(x))/dx$

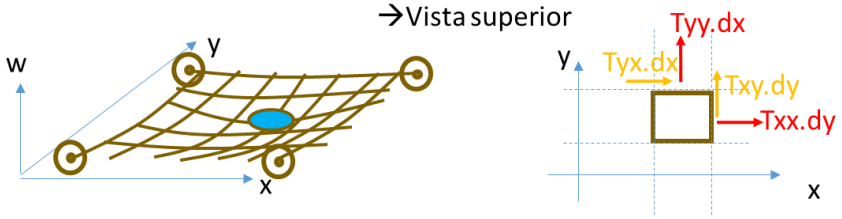
$\lambda(x)/T_o=w''(x)$

Esto significa que la cuerda tiende a mantenerse recta, con derivada segunda nula $w''(x)=0$, en las regiones donde no hay nada apoyado $\lambda(x)=0$. En las zonas donde hay cargas aplicadas, el perfil de la cuerda se curva en proporción a la densidad de "carga" por unidad de longitud.

Membrana-2D:

En este otro ejemplo, organizamos a la membrana en pequeños sectores dx,dy donde el perfil w(x,y) es aproximadamente plano. Cada porción se describe con:

- coordenadas x,y. Extensión dx,dy
- altura w(x,y)
- masa dm
- carga externa vertical σ(x,y).dx.dy
- ángulos θ_x y θ_y. $\tan(\theta_x)=\partial w/\partial x$. $\tan(\theta_y)=\partial w/\partial y$
- tensiones $T_{xx}(x,y)$, $T_{xy}(x,y)$, $T_{yx}(x,y)$, $T_{yy}(x,y)$



Los balances horizontales son más complicados que en el caso unidimensional.
No existe una única cantidad T(x,y) que verifique $\partial(T.\cos\theta_x)/\partial x=0$ y $\partial(T.\cos\theta_y)/\partial y=0$.
Se precisan 4 tensiones que se ubican como componentes de una matriz 2x2.

$[T_{xx}\ \ T_{xy}]$
$[T_{yx}\ \ T_{yy}]$

En cada segmento de longitud 'dy', que separa dos vecinos horizontales, hay una fuerza normal (roja) y otra rasante (naranja): $\vec{F} = dy.[T_{xx}.\cos(\theta_x)\ \hat{x} + T_{xy}.\cos(\theta_y)\ \hat{y}]$.
Análogamente, en cada segmento de longitud 'dx', que separa dos vecinos transversales, hay una fuerza normal (roja) y otra rasante (naranja): $\vec{F} = dx.[T_{yx}.\cos(\theta_x)\ \hat{x} + T_{yy}.\cos(\theta_y)\ \hat{y}]$.

La condición de equilibrio vertical se formula en términos de la divergencia de un tensor. Un tratamiento exacto requiere introducirnos en el Análisis Tensorial, veremos más detalles en el próximo capítulo 8.4.
Curiosidad: Esta matriz 2x2, o su equivalente 3x3 en 3 dimensiones, se llama "Tensor de Tensiones".
Fue históricamente el primer tema físico donde se introdujo el término "tensor" para referirse a magnitudes que precisan 2 o más índices para su descripción.

Para poder continuar, al menos en forma aproximada, necesitamos asumir que las inclinaciones son muy chicas ($\text{sen}\theta\approx\tan\theta$) y que alcanza una mínima tensión rasante para lograr el equilibrio en 'x' y en 'y'.
El tensor resulta ser de "diagonal dominante", y el balance vertical en 'w' se simplifica:

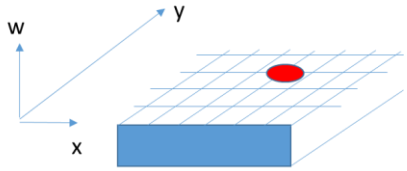
$\sigma.dx.dy \approx dy.[T_o.\text{sen}\theta_x]|_{x+dx/2} - dy.[T_o.\text{sen}\theta_x]|_{x-dx/2} + dx.[T_o.\text{sen}\theta_y]|_{y+dy/2} - dx.[T_o.\text{sen}\theta_y]|_{y-dx/2}$
$\sigma.dx.dy \approx dy.\ dx.\partial[T_o.\text{sen}\theta_x]/\partial x + dx.dy.\partial[T_o.\text{sen}\theta_y]$
$\sigma.dx.dy \approx dy.dx.\ T_o\ \partial^2[w]/\partial x^2 + dy.dx.\ T_o\ \partial^2[w]/\partial y^2$
$\sigma(x,y) \approx T_o.(\partial^2[w]/\partial x^2+\partial^2[w]/\partial y^2)$
$\sigma(x,y)/T_o \approx \nabla^2 w(x,y)$

Esto lo interpretamos de la siguiente manera:

- En ausencia de esfuerzos, la cuerda tiende a ser recta $w''(x)=0$ y la membrana tiende a ser plana $\partial^2w/\partial x^2=\partial^2w/\partial y^2=0$. Podemos decir que esos son los estados a los que *querrían* llegar.
- En presencia de esfuerzos, ambas se curvan en las regiones de apoyo. Fuera de los apoyos, la cuerda alcanza el estado recto pero la membrana nunca llega a ser plana. Sin embargo, la membrana alcanza un estado de "cero fuerza neta" con un perfil w(x,y) armónico, de laplaciano nulo. Y a distancia suficiente, lejos del apoyo, la inclinación y la curvatura tienden a ser nulas.
- Ambos sistemas dependen de un sostén remoto, en el caso de la cuerda serían un par de puntos de fijación y en el caso de la membrana un anillo que envuelve todo.
- A los efectos de modelar nuestro Universo, estamos recorriendo un camino similar a algunas culturas antiguas de la Humanidad que imaginaban que el mundo era un "plato" :), y temían caerse hacia un vacío si llegaban a los bordes del *plato*.
- A continuación exploraremos otros modelos basados en la idea de un colchón elástico. También dependeremos de un sostén remoto, algo así como unas paredes verticales que impiden que los centros elásticos del colchón deslicen hacia los costados.
  Los miembros de nuestro Universo serán objetos 'M', 'm' que se apoyan sobre el colchón. Nuestro colchón también será un protagonista dinámico y tendrá sus propias reglas de deformación, en un intento de describir al espaciotiempo relativista.

7.4.1 Fuerzas gravitatorias sobre una masa 'm':

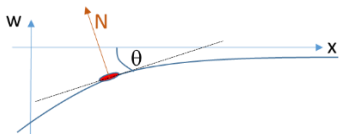
Imaginamos que vivimos en un mundo bi-dimensional de coordenadas (x,y), tal que nuestras ecuaciones involucran funciones f(x,y). La curvatura de nuestro mundo la visualizamos con una tercera dimensión w.



El espacio n+1 dimensional es como un "*colchón*" elástico que se extiende hacia el semi-espacio w<0, y nuestro *mundo* donde ocurren todos los fenómenos que estudiamos es la superficie de ese colchón que coincide con el plano w=0 en ausencia de perturbaciones.

Usamos la letra 'w' para referirnos a la coordenada extradimensional o "foránea" porque nos reservamos la 'z' para cuando precisemos una 3ra dimensión espacial para describir el mundo real que habitamos (x,y,z). El problema es que entonces la foránea 'w' será una cuarta dimensión y se dificultarán las visualizaciones. Continuamos con el modelo (x,y) mientras necesitemos ayudarnos con visualizaciones geométricas.

En presencia de perturbaciones gravitatorias la superficie se inclina y se desplaza respecto al nivel de reposo w=0. Una función w(x,y) describiría el apartamiento en cada punto de la superficie del colchón.



En un corte en el plano (x,w) se observa una masa 'm' apoyada sobre una superficie deformada.
La masa 'm' es un habitante del mundo bidimensional (x,y), la modelamos como un disco sin extensión en la dimensión extra 'w'.
En la superficie de apoyo se genera una fuerza normal 'N', que únicamente puede cancelar la componente del peso m.g.cos(θ) normal a la superficie.
Queda sin compensar la componente tangencial, que produce un deslizamiento m.g.sen(θ).

Advertencia:
Este modelo no ofrece demostraciones rigurosas porque intenta *explicar la gravedad a través de la propia gravedad*, lo que constituye un razonamiento cíclico. Para cortar el círculo vicioso aclaramos lo siguiente:

- Aspiramos a conformarnos solo con ideas cualitativas y semi-cuantitativas.
- La gravedad $\vec{g} = -g.\hat{w}$ que actúa en la dimensión adicional y que *hunde* nuestro tejido de espacio-tiempo es la antigua gravedad newtoniana, que aceptamos sin cuestionar ni demostrar.
- Los efectos sobre nuestro tejido de espacio-tiempo (la superficie del colchón) son la nueva gravedad compatible con la Teoría de la Relatividad que queremos modelar.

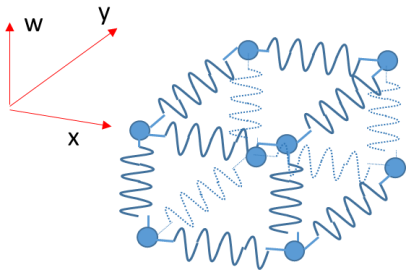
Hecha la advertencia, proyectamos sobre el eje $\vec{x}$ la fuerza de deslizamiento, incluyendo un factor cos(θ).
El resultado es una componente de fuerza $f_x = -m.g.\cos(\theta).\text{sen}(\theta)$.
A lo largo de toda esta sección vamos a suponer pequeñas perturbaciones, lo que implica que los ángulos de inclinación son chicos y se puede aproximar $\cos(\theta)\approx 1$, $\text{sen}(\theta)\approx \text{tg}(\theta)\approx\theta$.
Aproximamos $f_x \approx -m.g.\text{tg}(\theta)$.
Reconocemos que $\text{tg}(\theta)=\partial w/\partial x$, es la pendiente del perfil superficial del colchón
$U_g(x,y) = m.g.w(x,y)$ es la energía potencial gravitatoria para puntos sobre la superficie del colchón
$\Phi_g = g.w(x,y)$, potencial gravitatorio o energía potencial por unidad de masa
Sustituyendo las magnitudes en la ecuación de fuerza tenemos: $f_x \approx -m.\partial\Phi_g/\partial x$

Esto fue en la dirección $\vec{x}$, donde el ángulo de inclinación deberíamos llamarlo θ_x para diferenciarlo de ángulos en otras direcciones.
Si el colchón tuviera inclinación θ_Y en la otra dirección $\vec{y}$, la visualizaríamos en forma similar realizando un corte en un plano (y,w) con 'x' constante. Y llegaríamos a: $f_Y \approx -m.\partial\Phi_g/\partial y$
La ecuación conjunta en 'x', 'y' se expresa vectorialmente: $\vec{f} = -m.\nabla\Phi_g$

7.4.2 Modelo de "colchón de resortes":

Proponemos modelar el interior del colchón como un arreglo cúbico de bolas de masa 'm_o' unidas por varillas elásticas de constante elástica 'k_o' y longitud de reposo 'l_o'.

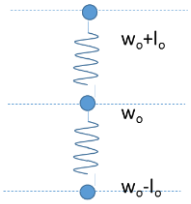
Como alternativa podríamos trabajar con una membrana elástica, los detalles exactos no son tan importantes sino el concepto de deformación elástica.



Definimos los siguientes conjuntos de coordenadas:

- $x = x_o + \delta_X$.
- $y = y_o + \delta_Y$.
- $w = w_o + \delta_W$.

(x_o,y_o,w_o) son las posiciones de reposo de la grilla de masas-resortes, en ausencia de esfuerzos.
(x,y,w) son las posiciones desplazadas, luego de aplicar esfuerzos externos.
O también esfuerzos internos, porque veremos que las propias masas m_o también producen una tensión de base o de fondo.
$\vec{\delta}$ es un campo vectorial de desplazamientos.
Estudiamos brevemente el balance de fuerzas verticales según el eje $\vec{w}$.
Analizamos la masa central ubicada en w_o, con su vecina superior en w_o+l_o y su vecina inferior en $w_o–l_o$.



Los centros de los resortes son $w_o+l_o/2$ y $w_o–l_o/2$.
Suponemos que las funciones varían suavemente dentro de la región ocupada por un elemento masa-resorte, lo que nos permite aproximar las derivadas como cocientes incrementales.

Longitud del resorte superior $l(w_o+l_o/2) = l_o + \delta_W(w_o+l_o) –\delta_W(w_o) \approx l_o.[\ 1 + \partial\delta_W/\partial w_o(w_o+l_o/2)]$
($\partial\delta_W/\partial w_o$ se llama *deformación unitaria*)
Fuerza $f_w = k_o.(l–l_o) \approx k_o.l_o.[\ \partial\delta_W/\partial w_o(w_o+l_o/2)]$

- Longitud del resorte inferior $l(w_o –l_o/2) = l_o + \delta_W(w_o) –\delta_W(w_o–l_o)$
  Fuerza $f_w = –k_o.(l–l_o) = –k_o.[\ \delta_W(w_o)–\delta_W(w_o–l_o)] \approx –k_o.l_o.[\ \partial\delta_W/\partial w_o(w_o–l_o/2)]$
  (*signo – porque "tira" hacia abajo si $l>l_o$, o empuja hacia arriba si $l<l_o$*)

Combinamos las 2 contribuciones de cada resorte y nos da otro cociente incremental interpretable como derivada en el límite de variaciones suaves:

$f_w = k_o.l_o.[\ \partial\delta_W/\partial w_o(w_o+l_o/2)] –k_o.l_o.[\ \partial\delta_W/\partial w_o(w_o–l_o/2)]$
$f_w = k_o.l_o.[\ \partial\delta_W/\partial w_o(w_o+l_o/2) – \partial\delta_W/\partial w_o(w_o–l_o/2)\ ]$ $\rightarrow f_w \approx k_o.l_o^2.\partial^2\delta_W/\partial w_o^2$

Aún en ausencia de masas adicionales 'M', las propias masas 'm_o' que forman parte de la estructura impiden que esta derivada segunda pueda ser estrictamente nula. Se precisa un leve desbalance de fuerza entre el resorte superior y el inferior para compensar el peso de la bola $–m_o.g$,

$f_w = m_o.g$ da lugar a una ecuación diferencial de segundo orden con solución sencilla.
$m_o.g = k_o.l_o^2.\partial^2\delta_W/\partial w_o^2$

Podríamos resolverla completamente integrando 2 veces, pero nos detenemos momentáneamente luego de la primera integración para intepretar el resultado parcial.

$\partial^2\delta_W/\partial w_o^2 = m_o.g/(k_o.l_o^2)$
$\partial\delta_W/\partial w_o = m_o.g/(k_o.l_o^2).w_o$

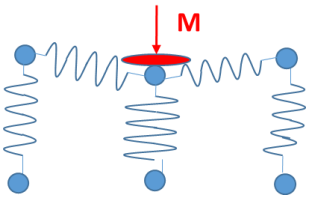
La cantidad que tenemos aquí expresada tiene significado físico. Se llama "*deformación unitaria*" y está directamente relacionada con el estado de tensión del *material*.

Las capas más profundas están más tensionadas (deformadas) porque deben soportar el peso de las capas más superficiales; es la misma ley que describe la evolución de la presión hidrostática en los tanques y depósitos.
Observar:

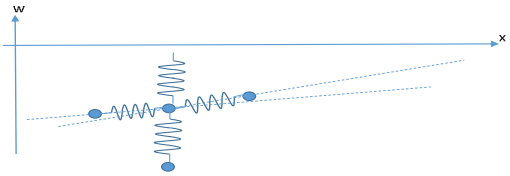
- $w_o=0$ es la superficie límite, la región que analizamos es $w_o<0$.
- El signo de la deformación unitaria es negativa, lo que se asocia al estado de compresión.

Si integramos una segunda vez obtenemos el perfil volumétrico de desplazamientos $\delta_W(w_o)$.
En particular no nos interesa tanto el volumen entero del colchón $w_o<0$ sino solo su superficie, el mundo donde *habitamos* y donde ocurren todos nuestros eventos. Lo que se describe evaluando $\delta_W(w_o=0)$.

Cuando aplicamos masas externas 'M', la superficie del colchón se altera y la deformación se propaga hacia el interior del volumen.



El balance de fuerzas verticales f_w, que es el que nos interesa, debe también contemplar los vecinos-X (a la izquierda y a la derecha), y los vecinos-Y al frente y atrás. Hagamos un corte con un plano (x,w):



El vecino de la derecha ejerce su fuerza con una inclinación $\theta_x(x_o+l_o/2)$, mientras que el vecino de la izquierda la ejerce con una inclinación $\theta_x(x_o-l_o/2)$. Ambos efectos se oponen mayormente, y el resultado final es una pequeña diferencia. ¿Por qué? Porque suponemos variaciones muy débiles en el entorno de una longitud l_o. Si el estado tensional local es tal que el resorte derecho está traccionado, el izquierdo probablemente también lo estará. Si un resorte está comprimido, el otro también lo estará; precisamos desplazarnos varias celdas básicas para pensar en la posibilidad de un cambio de signo de la tensión.

La fuerza neta es proporcional a la diferencia $\theta_x(x_o+l_o/2) - \theta_x(x_o-l_o/2) = w'(x_o+l_o/2)-w'(x_o-l_o/2) \approx l_o.w''(x_o)$.
Con $w'(x_o)$ nos estamos refiriendo a la derivada parcial en esta dirección, o sea $\partial\delta_W/\partial x_o$
$w''(x_o) = \partial^2\delta_W/\partial x_o^2$
Siguiendo con esta misma línea de razonamientos, vemos que en un plano (y,w) los vecinos de adelante y atrás también van a dar su contribución a la fuerza f_w, proporcional a $w''(y_o) = \partial^2\delta_W/\partial y_o^2$
No entraremos en detalles finos sobre cuál es el factor de escala; simplemente asumimos el riesgo de estar cometiendo una imprecisión y supondremos que comparten el mismo factor de escala encontrado en el razonamiento de los resortes verticales
$f_w = k_o.l_o^2.\partial^2\delta_W/\partial w_o^2$
Lo que nos conduce a una ecuación completa de la forma:

$$f_w = k_o.l_o^2.(\partial^2\delta_W/\partial x_o^2+\partial^2\delta_W/\partial y_o^2+\partial^2\delta_W/\partial w_o^2)$$

$$f_w = k_o.l_o^2.\ \nabla^2\delta_W$$

7.4.3 Propagación de perturbaciones:

La ecuación de equilibrio sobre una masa de la estructura es $f_w - m_o.g = 0$.
En un caso general, sin embargo, podemos contemplar la posibilidad de apartamientos respecto al equilibrio que obedecen a una ecuación dinámica $f_w - m_o.g = m_o.\partial^2\delta_w/\partial t^2$ (fuerza neta igual a masa por aceleración)

$$k_o.l_o^2.\ \nabla^2\delta_w - m_o.g = m_o.\partial^2\delta_w/\partial t^2$$

$$k_o.l_o^2.\ \nabla^2\delta_w - m_o.\partial^2\delta_w/\partial t^2 = m_o.g$$

$$\nabla^2\delta_w - m_o/(k_o.l_o^2).\partial^2\delta_w/\partial t^2 = m_o.g/(k_o.l_o^2)$$

Es una ecuación de ondas con fuentes.
Ya conocemos una solución particular, que es la que predice una variación de tensión en función de la profundidad.
Los apartamientos de esa solución siguen una ecuación de ondas con operador $\nabla^2 - 1/v_p^2.\ \partial^2/\partial t^2$
La velocidad de propagación de las perturbaciones verifica $v_p^2 = (k_o.l_o^2)/m_o$

En Teoría de la Relatividad, la velocidad protagónica es la de la luz 'c'. Si nuestro colchón va a modelar el tejido del espacio-tiempo relativista, podemos dejar planteada la idea de que dichas perturbaciones deberían propagarse a la velocidad de la luz. Que estaría en consonancia con el Gravitomagnetismo de 7.1 y con el fenómeno de ondas gravitacionales que se estudia en Relatividad General → $m_o.c^2 = (k_o.l_o^2)$
Curiosidad histórica: Cuando Einstein desarrolló la Teoría Especial de la Relatividad vio que era incompatible con la Gravitación de Newton, la cual predecía fuerzas gravitatorias instantáneas o propagación de efectos a velocidad infinita; esta fue una de sus motivaciones para seguir desarrollando la Relatividad de manera que pudiera incorporar la Gravitación.

7.4.4 Métrica en el "colchón":

Volvemos a la solución particular de tensiones causadas únicamente por las masas de la estructura.

$$\partial\delta_w/\partial w_o = m_o.g/(k_o.l_o^2).w_o$$

Cuando hacíamos referencia al *vecino de arriba*, escribíamos "el ubicado en w_o+l_o".
Al vecino *de la derecha* nos referíamos ubicándolo en x_o+l_o.
Al vecino *del frente o de adelante* lo ubicábamos en y_o+l_o.
Lo cierto es que estábamos utilizando las coordenadas *sin deformar* (x_o,y_o,w_o).
El estado tensional deforma los resortes, acortándolos o alargándolos de acuerdo al siguiente concepto que analizamos tomando a los resortes verticales como referencia.
Masa actual: ubicada en $w_o+\delta_w(w_o)$
Masa de arriba ubicada en $w_o+ l_o + \delta_w(w_o+l_o)$
Longitud del resorte que une las masas = $l(w_o+l_o/2) = l_o + \delta_w(w_o+l_o) - \delta_w(w_o)$

Aproximando la derivada por cociente incremental:

$$l(w_o+l_o/2) \approx\ l_o + l_o.\ \partial\delta_w/\partial w_o.(w_o+l_o/2)$$

Suponiendo variaciones suaves, concebimos una función continua definida en todos los w_o (aunque no haya centros de resorte en esas coordenadas).

$$l \approx\ l_o + l_o.\ \partial\delta_w/\partial w_o$$

$$l \approx\ l_o.(\ 1 + \partial\delta_w/\partial w_o)$$

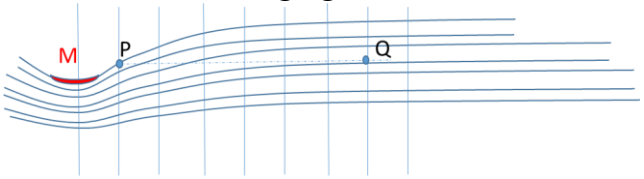
¿Cómo influye esto en la métrica? Si medimos la distancia entre dos masas separadas 3 resortes, la diferencia entre nuestras coordenadas es $3.l_o$ pero la distancia real es $3.l_o.(1+\partial\delta_w/\partial w_o)$.
Las métricas suelen involucrar distancias al cuadrado, por lo cual escribimos:

$$l^2 \approx\ l_o^2.(\ 1 + \partial\delta_w/\partial w_o)^2$$

Para deformaciones unitarias pequeñas $\ll 1$ aproximamos:

$$l^2 \approx\ l_o^2.(\ 1 + 2.\partial\delta_w/\partial w_o)$$

A continuación, cometemos el atrevimiento de suponer que el estado tensional varía linealmente con la profundidad debido mayormente a la contribución de las masas 'm_o' de la estructura, *aún en presencia de masas externas 'M' agregadas*.



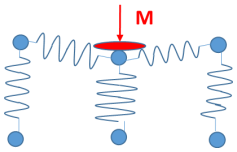
- P=punto sobre la superficie del colchón (w_o=0) que pertenece a nuestro mundo y en el cual nos interesa calcular la perturbación métrica cerca de una masa deformante 'M'
- Q=punto auxiliar en el interior del colchón, lejos de la deformación; no pertenece a nuestro mundo pero nos sirve de auxiliar para conocer el estado tensional porque está a la misma profundidad que P.

Esta "Ley de la presión vs. la profundidad" era, según 7.4.2, $\partial\delta_w/\partial w_o = m_o.g/(k_o.l_o^2).w_o$
Reconocemos $m_o/(k_o.l_o^2) = 1/c^2$, velocidad de propagación de las perturbaciones de 7.4.3.
Identificamos también $g.w_o = \Phi_g$, potencial gravitatorio de 7.4.1.

Entonces la métrica $l^2 \approx l_o^2.(1 + 2.\partial\delta_W/\partial w_o)$ se convierte en $l^2 \approx l_o^2.(1 + 2.\Phi_g/c^2)$

El orden de magnitud contempla exactamente los fenómenos relativistas observados al inicio del capítulo 7, pero hay una discordancia en el signo: Los potenciales son todos negativos porque el volumen se extiende hacia la zona w_o<0. Parece que nuestro modelo de resortes no está prediciendo una contracción de longitudes sino lo opuesto.

Podemos resolver esta discordancia de signo mediante un nuevo atrevimiento: recordando una reacción que exhiben los materiales elásticos, que al ser comprimidos en una dirección responden con una tracción en las direcciones transversales. Como si quisieran conservar el volumen, aunque no lo logren en forma exacta.
Es lo que se visualiza en la figura de un par de páginas atrás, la repetimos:

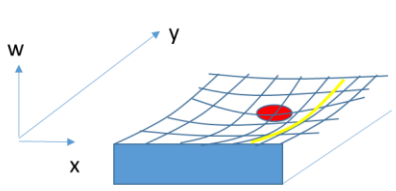


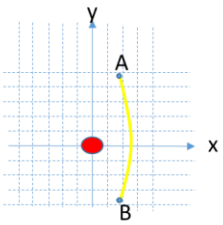
Los resortes verticales se extienden volumétricamente hacia abajo del colchón, no forman parte de nuestro mundo superficial. En la superficie del colchón están los resortes horizontales, que son los que nos interesan, y podemos aproximar su estado de tracción como si fuera numéricamente igual al de compresión que tienen los resortes verticales a la misma profundidad.
Conclusión: $l_x^2 \approx l_y^2 \approx l_o^2.(1 - 2.\Phi_g/c^2)$
Nos interesa la métrica l_x, l_y; la métrica 'l_w' solo la usamos como auxiliar de apoyo a los cálculos.
Ejercicio: Reflexionar si este modelo predice un enlentecimiento en la propagación de perturbaciones sobre su superficie dependiendo del potencial gravitatorio, al igual que la luz en la sección 6.6.

7.4.5 Curvatura de la luz:

En la figura siguiente se muestra:

- en rojo una masa 'M' que altera localmente la métrica del colchón
- en amarillo un rayo de luz que une los puntos A,B
- la gráfica izquierda son 3 dimensiones x,y,w; la derecha es una vista *aérea* en 2 dimensiones x,y





El modelo del tejido elástico de esta sección 7.4 trata en todo momento a la coordenada temporal 't' aparte de las espaciales, no maneja ningún argumento relativista de dilatación temporal.
Sin embargo, únicamente en base a razonamientos espaciales y a contracciones de longitud, se puede llegar a los mismos resultados que obteníamos en el capítulo 6 razonando por dilatación temporal.
Aquí la luz *elige* una curva para ir de A hacia B en lugar de una línea recta.

¿Por qué? Porque los diferenciales coordenados pesan más en la métrica cuanto mayor es la cercanía a la masa perturbante; la trayectoria de métrica mínima es una que se aleja un poco de la masa para poder circular en una zona más plana, con menor afectación métrica.

El tratamiento matemático sería algo así:

Métrica $dS^2 = (1 - 2\Phi_g/c^2).(dx^2+dy^2)$

Lagrangeano $\mathcal{L}(x,y,\dot{x},\dot{y},s)=\sqrt{(1-2\Phi_g/c^2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}$

x(s), y(s) parametrizados según la longitud de arco 's', como en 7.3.4.

Por simplicidad asumimos que los puntos A,B están muy cerca y el rayo de luz circula perpendicular al eje horizontal y=0. El trozo de curva se aproxima por un arco circular de centro lejano $(X_c,0)$, radio grande R_c y parametrización $x(s)=X_c + R_c.\cos(\theta)$, $y(s)=R_c.\sin(\theta)$.

La longitud de arco es $s\approx R_c.\theta$, con lo cual tenemos:

$x(s)=X_c + R_c.\cos(s/R_c)$ $\quad$ $y(s)=R_c.\text{sen}(s/R_c)$

$\dot{x}(s) = dx/ds = -\text{sen}(s/R_c)$ $\quad$ $\dot{y}(s)=\cos(s/R_c) \rightarrow \dot{y}(0)=1$

$x\ddot{}(s) = -1/R_c.\cos(s/R_c)$

$\rightarrow$ $x\ddot{}(0) = -1/R_c$ esta cantidad trae información sobre el radio de curvatura

Momento lagrangeano $P_x=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} =(1 - 2\Phi_g/c^2).\dot{x}$

Aceleración $dP_x/ds = (1 - 2\Phi_g/c^2).x\ddot{}$

Fuerza gravitatoria $\partial\mathcal{L}/\partial x = 1/(2\sqrt{\ })(-2/c^2)\partial\Phi_g/\partial x.(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$

Evaluamos en s=0, x=R, y=0, $\dot{x}$=0, $\dot{y}$=1

Ecuación de Euler-Lagrange $dP_x/ds = \partial\mathcal{L}/\partial x$, simplificamos $(1 - 2\Phi_g/c^2)\approx 1$ para campos débiles

$x\ddot{}= (-1/c^2)\partial\Phi_g/\partial x = -g_x/c^2$

$\rightarrow$Nos da el mismo radio de curvatura que en el capítulo 6.2

Esta sección 7.4 debe considerarse como igual de imperfecta que los principios del capítulo 6.

Ninguno de los dos modelos aislados describen correctamente a la gravedad real, pero la complementación de ambos permite explicar fenómenos como la doble curvatura de los rayos de luz.

7.4.6 Generación de perturbaciones mediante masas 'M':

Queda pendiente este aspecto para cerrar el modelo del colchón.

Retomamos la ecuación diferencial $\nabla^2\delta_w = m_o.g/(k_o.l_o^2)$

A las contribuciones de masa interna de la estructura 'm_o' le agregamos la de masas externas 'M'.

Nos queda:

$\nabla^2\delta_w = (M+m_o).g/(k_o.l_o^2)$

Separamos la solución particular ya encontrada (variación de tensión lineal con la profundidad) y nos concentramos en los agregados de masas M(x,y) sobre cada elemento superficial de la estructura.

La masa 'M' actúa sobre una 'm_o' separada 'l_o' de sus vecinas tanto en 'x' como en 'y', o sea que ocupa un área igual a l_o^2 y se asocia a una densidad superficial $\sigma_M(x,y) = M/l_o^2$

Sustituimos en la parte perturbativa de la ecuación diferencial:

$\nabla^2\delta_w = (\sigma_M.l_o^2).g/(k_o.l_o^2)$

$\nabla^2\delta_w = \sigma_M.g/k_o$

Identificamos $\Phi_g = g.\delta_w$ (en w_o=0), y sustituimos:

$\nabla^2\Phi_g \approx \sigma_M.g^2/k_o$

Problema: En 2 dimensiones debemos modelar las estrellas o planetas como discos.

Una vez resuelto el potencial en el interior del astro masivo $x^2+y^2<R^2$, pasamos a la región exterior donde el laplaciano es nulo. En el caso de 2 dimensiones, los armónicos relevantes son los armónicos cilíndricos que involucran log(r), siendo $r^2= x^2+y^2$.

Este no es el potencial gravitatorio que aplica a los planetas y estrellas de nuestro mundo conocido.

Su derivada segunda (curvatura) y su derivada primera (inclinación) tienden asintóticamente a cero, pero no el potencial propiamente dicho (el desplazamiento respecto al estado de equilibrio).

Deberemos abandonar la simplificación (x,y) y pasar a 3 dimensiones (x,y,z).
El mundo n+1 dimensional será entonces (x,y,z,w), perdemos la posibilidad de *visualizarlo* mediante un colchón que se hunde y tensa. Deberemos hacer un esfuerzo de abstracción para extrapolar los conceptos.
Las masas 'M' aplicadas en la hipersuperficie $w_o=0$ actúan sobre una masa de la estructura 'm_o' que tiene vecinos ubicados a distancia 'l_o' en las 3 direcciones coordenadas x,y,z, ocupando un volumen l_o^3.
La sustitución relevante es en base a una densidad volumétrica de masa $\rho_M = M/l_o^3$
La ecuación de Poisson con fuentes pasa a ser: $\nabla^2\Phi_g \approx \rho_M.l_o.g^2/k_o$
Ahora es $\Phi_g(x,y,z)$, y ∇^2 es el laplaciano tridimensional $\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.
Los planetas o estrellas se modelan correctamente como esferas de radio R, y los potenciales externos a distancia r>R son los armónicos conocidos –M.G/r (siendo 'M' la masa total, $r^2=x^2+y^2+z^2$).
Cerraríamos entonces el modelo introduciendo una relación más de calibración entre nuestros parámetros m_o, k_o y l_o para alinearnos con la ecuación de Newton-Poisson $\nabla^2\Phi_g \approx 4\pi G.\rho_M$.

Repetimos la advertencia hecha al principio de esta sección 7.4:
Este modelo elástico no está pensado para una descripción precisa de la gravedad sino más bien cualitativa.
En algún capítulo próximo volveremos a las masas y los resortes, pero no para modelar a un vacío hipotético extradimensional sino a sólidos físicos de nuestra dimensión: la fórmula 7.4.3 $v_p^2 = (k_o.l_o^2)/m_o$ será válida y útil para esos conceptos (sección 10.5.5), incluso en el límite $v_p=c$.
La ecuación 7.4.2, que relaciona la fuerza con el laplaciano del desplazamiento, la volveremos a encontrar en el contexto del tensor de tensiones de un sólido (sección 8.4) y su contribución al tensor relativista de energía-impulso (capítulo 10).

7.4.7 Lecturas adicionales:

Consideramos que este modelo de masas y vibraciones podría tener puntos de contacto con otros conceptos manejados en otras áreas de la Física, y sugerimos pensar o buscar información sobre los siguientes temas:

- El éter: sustancia etérea hipotética que llena todo el vacío. En el contexto de la Relatividad Especial fue necesario abandonar la idea del éter, sin embargo en este modelo gravitatorio parece reflotar la idea de *algo* que transmite los efectos entre las masas 'M' y 'm'.
- Energía de vacío o energía de punto-cero.
- Teoría de cuerdas.

8. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS.

En los capítulos previos viene perfilándose una asociación fuerte entre gravedad y curvatura.
Las trayectorias de las partículas materiales, calculadas a partir de las ecuaciones variacionales de Euler-Lagrange que buscan soluciones de tiempo propio máximo, resultan ser las curvas geodésicas de distancia mínima en la métrica cuadridimensional deformada ("*curvada*") por las demás masas.

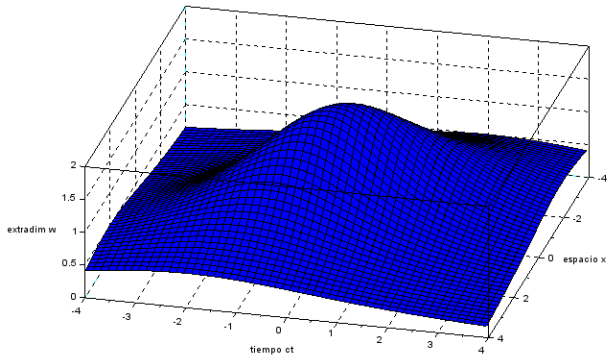
Antes de seguir avanzando en un mejor entendimiento de los fenómenos gravitatorios debemos incursionar en Geometría Diferencial y en el estudio de superficies curvas, y reforzaremos también algunos conceptos de Cálculo Tensorial. Esto implica que durante varias páginas vamos a estar enfocados en contenidos más matemáticos que físicos. El capítulo puede ser salteado o leído en forma ligera por quien que ya tenga las bases matemáticas correspondientes.

8.1 Sistemas de coordenadas.

Complementamos los escenarios iniciados en capítulos anteriores, que a grandes rasgos seguían las siguientes ideas:

- Vivimos en un mundo de n=4 dimensiones (ct, x, y, z) donde medimos una métrica no euclideana y observamos fenómenos atribuibles a una curvatura.
- En regiones reducidas podemos elegir un conjunto de coordenadas tales que la métrica se aproxime localmente a la de Minkowski de la Relatividad Especial.
- La curvatura podría ser concebida en un hipotético espacio n+1 dimensional donde estaría "embebida" la superficie que habitamos con sus 'n' grados de libertad (ct,x,y,z).

En las publicaciones sobre Relatividad General se le pone un nombre al "mundo" que habitamos.
Se dice que es un tipo de "variedad diferenciable de 4 dimensiones", en inglés " *differentiable manifold* ".
El concepto de variedad es una extensión multidimensional de lo que es una superficie curva bidimensional embebida en $\mathbb{R}^3$: tiene definida una métrica y un espacio tangente en cada punto donde la métrica se reduce a una forma simple.



De cualquier manera, el hecho de tener un nombre no ayuda demasiado a la visualización gráfica.
Los dos obstáculos principales para la visualización son: una cantidad excesiva de dimensiones y el hecho adicional de que una de ellas es temporal o "*time-like*". Debido a la dificultad de ver lo anterior, basamos la mayoría de los ejemplos en n=2, siendo ambas dimensiones espaciales o "*space-like*" → Superficies con 2 grados de libertad embebidas en un espacio de 3 dimensiones. En estas condiciones el "espacio tangente" sería entonces un plano tangente y se podría visualizar. En la figura se observa que una forma compleja con variación suave se puede dividir en pequeños sectores que son como "retazos" de tela o "baldosas"; a cada sector, aproximadamente plano, se le pueden aplicar las herramientas de geometría plana.

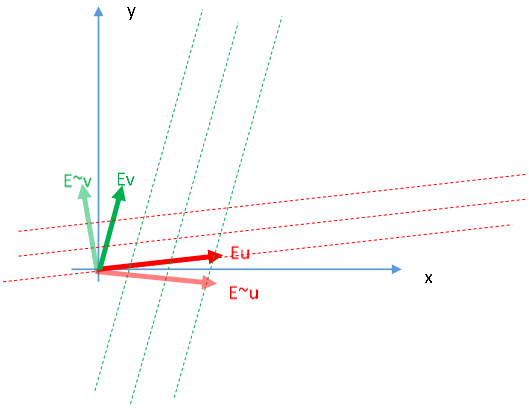
En nuestros próximos desarrollos nos apoyaremos en un espacio de referencia donde la métrica es lo más simple posible: euclídea si la variedad es de tipo "Riemann" (signatura +,+,+) o Minkowski si la variedad es de tipo "Lorentz" o "pseudo-Riemann" (signatura -,+,+,+).

Las coordenadas cartesianas (x,y,z) son útiles para dos propósitos: o bien pertenecen a un espacio de igual dimensión que el de las coordenadas analizadas (en tal caso lo asumimos como euclídeo). O bien son un tipo de coordenadas canónicas o universales y se refieren al espacio de dimensión n+1 donde están embebidas las superficies curvas que estudiamos. No llevan subíndice ni superíndice porque no son contravariantes ni covariantes. A menudo las indizaremos con letras del alfabeto latino [i] [j] entre corchetes sin subir ni bajar el índice, como si fueran el objeto de un arreglo o "*array*" de un lenguaje informático. Si alguna vez anotamos x^i o x_i, deberemos recordar que no se alteran los valores por el hecho de que un índice esté arriba o abajo, porque en este espacio canónico la métrica es euclídea y no hay distinción $x^i=x_i$.
Los conceptos de varianza sí aplican cuando elegimos coordenadas genéricas no cartesianas, o para las coordenadas de ubicación en las superficies curvas que estudiaremos. Estas se indizan con letras del alfabeto griego α, β, λ, μ…etc, que van arriba o abajo según corresponda a su varianza.

En otros contextos nuestras coordenadas canónicas serán (ct,x,y,z), y la métrica de referencia será la de Minkowski (métrica plana). Incluso en un mundo gravitatorio siempre es posible acceder a esta situación alejándonos lo suficiente de las fuentes gravitatorias, o también utilizando coordenadas localmente inerciales en un referencial de caída libre. En estos contextos será importante distinguir índices bajos o altos. Si expresamos un producto escalar como $< \vec{F} , \vec{F} >$ (escrito F^iF_i en notación de índices), al momento de calcularlo deberemos prestar atención a que uno de los arreglos de números deberá negar su componente temporal respecto al otro, para que el producto de términos temporales reste en la suma de cuadrados (a eso lo llamamos signatura -,+,+,+).

8.1.1 Coordenadas oblicuas:

Comenzamos trabajando en 2 dimensiones y una base canónica cartesiana de vectores $\hat{x}$, $\hat{y}$.



Estudiamos la transformación de coordenadas para pasar a un nuevo conjunto de vectores base $\vec{E_u}$ y $\vec{E_v}$.
Las fórmulas de transformación son:

$$\vec{E_u} = \cos\theta\ \hat{x} + \text{sen}\theta\ \hat{y}$$
$$\vec{E_v} = \text{sen}\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \hat{y}$$

Dado un punto cualquiera del plano 2D, el vector que lo une con el origen es

$\vec{S} = u.\vec{E_u} + v.\vec{E_v}$ →sustituimos
$\vec{S} = u.(\cos\theta\ \hat{x} + \text{sen}\theta\ \hat{y}) + v.(\text{sen}\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \hat{y})$ →agrupamos en $\hat{x}$, $\hat{y}$
$\vec{S} = (u.\cos\theta+v.\text{sen}\theta).\hat{x} + (u.\text{sen}\theta+v.\cos\theta).\hat{y}$
$\vec{S} = x.\hat{x} + y.\hat{y}$

Identificamos:

$x = u.\cos\theta+v.\text{sen}\theta$ (lo que aparece multiplicando al vector $\hat{x}$)
$y = u.\text{sen}\theta+v.\cos\theta$ (lo que aparece multiplicando al vector $\hat{y}$)

Diferenciamos, teniendo en cuenta que la inclinación θ es constante en todo el plano.

$dx = du.\cos\theta+dv.\text{sen}\theta$
$dy = du.\text{sen}\theta+dv.\cos\theta$

Llamamos $d\vec{S}$ a un diferencial de desplazamiento entre dos puntos cercanos de nuestro espacio.
Es un invariante, debe dar lo mismo en cualquier referencia.

- En la base canónica, $d\vec{S} = dx^i.\hat{e}_i$. Indizamos con letras latinas, ej: 'i', variando i=x, i=y.
- En la base genérica, $d\vec{S} = dX^\alpha.\vec{E_\alpha}$. Indizamos con letras griegas, ej: 'α', variando α=u, α=v.

En ambos casos continuamos con la convención de suma iniciada en el capítulo 4, sección 4.5.
A la base de los $\vec{E_\alpha}$ la llamamos genérica: ahora son coordenadas oblicuas pero en otras ocasiones serán esféricas o de cualquier otro tipo.

El pasaje de una base a otra, que aquí calculamos en forma artesanal, se expresa formalmente:

$d\vec{S} = dx^i.\hat{e}_i$ →regla de la cadena
$d\vec{S} = dX^\alpha .\partial x^i/\partial X^\alpha.\hat{e}_i$
$d\vec{S} = dX^\alpha\ \hat{e}_i.\partial x^i/\partial X^\alpha$
$d\vec{S} = dX^\alpha\ \vec{E_\alpha}$

Las reglas de transformación al cambiar de base quedan:

$dx^i = dX^\alpha .\partial x^i/\partial X^\alpha$
$\vec{E_\alpha} = \hat{e}_i.\partial x^i/\partial X^\alpha$

La operación que convierte los diferenciales es una transformación lineal, y se puede visualizar en forma matricial. [Matriz].[columna]=[columna]

			du
i \α	u	v	dv
x	∂x/∂u	∂x/∂v	dx
y	∂y/∂u	∂y/∂v	dy

Dada una fila-x de la matriz izquierda, cada objeto de índice α se multiplica por su correspondiente de igual índice en la columna derecha, se suman los resultados parciales de cada índice (α=u,α=v) y se guarda el resultado en el casillero donde se intersectan visualmente el arreglo horizontal y el arreglo vertical.
Ejemplo: el diferencial 'dx' se calcula como gris*gris(para α=u) + rosado*rosado(para α=v)
Se repite para la fila-y.

La matriz asociada a la transformación lineal se llama "matriz jacobiana", [Jac].
Su elemento $J^i{}_\alpha$ vale $\partial x^i/\partial X^\alpha$ y se representa en la fila-i, columna-α.
En este ejemplo de coordenadas oblicuas vale:

			Du
i \α	u	v	Dv
x	cosθ	senθ	Dx
y	senθ	cosθ	Dy

La columna-u tiene las componentes canónicas del vector base-$\vec{E_u}$.
La columna-v tiene las componentes canónicas del vector base-$\vec{E_v}$.

8.1.2 Métrica:

La métrica consiste en una aplicación o función que toma una pareja de vectores y devuelve un número.
El resultado podríamos anotarlo $\{g\}(\vec{A},\vec{B})$, o siguiendo la notación de nuestros capítulos 2 y 3 $<\vec{A},\vec{B}>$.
Expresamos los vectores en nuestra base: $\vec{A}=A^\alpha\vec{E_\alpha}$ y $\vec{B}=B^\beta\vec{E_\beta}$.

$\{g\}(\vec{A},\vec{B}) = <\vec{A},\vec{B}>$
$= <A^\alpha\vec{E_\alpha}, B^\beta\vec{E_\beta}>$ →la aplicación es lineal, los escalares salen fuera
$= A^\alpha B^\beta <\vec{E_\alpha}, \vec{E_\beta}>$
$= A^\alpha B^\beta g_{\alpha\beta}$
$g_{\alpha\beta} = <\vec{E_\alpha}, \vec{E_\beta}>$

La linealidad implica que es suficiente con aplicar la métrica a cada pareja de vectores base.

Conociendo esos valores $g_{\alpha\beta}$ podemos calcular cualquier caso general $<\vec{A},\vec{B}>$. Pasa igual que con las transformaciones lineales en espacios vectoriales: alcanza con saber cómo operan sobre los vectores de la base. A la aplicación {g} que permite calcular distancias se la llama "tensor métrico", y se dice que $g_{\alpha\beta}$ son sus componentes covariantes en la base de los vectores $\vec{E_\alpha}$.

En el caso de las coordenadas oblicuas, la métrica es simplemente el producto escalar euclídeo $\vec{E_\alpha}\cdot\vec{E_\beta}$.
Podemos calcular manualmente todas las combinaciones y nos da:
$g_{uu} = \vec{E_u}\cdot\vec{E_u} = \cos^2\theta+\text{sen}^2\theta = 1$
$g_{vv} = \vec{E_v}\cdot\vec{E_v} = \text{sen}^2\theta+\cos^2\theta = 1$
$g_{uv} = \vec{E_u}\cdot\vec{E_v} = \cos\theta.\text{sen}\theta+\text{sen}\theta.\cos\theta=2.\cos\theta.\text{sen}\theta = \text{sen}(2\theta)$
$\pi/2-2\theta$ es el ángulo que forman sí entre los vectores base,
2θ es lo que les falta para que sean ortogonales y para que la métrica sea diagonal

Podemos visualizar los coeficientes métricos $g_{\alpha\beta}$ en una matriz de filas-α columnas-β, resultante del producto matricial del jacobiano traspuesto por el jacobiano (en ese orden).

			cosθ	senθ
i \α	u	v	senθ	cosθ
x	cosθ	senθ	g_{uu}	g_{uv}
Y	senθ	cosθ	g_{vu}	g_{vv}

La matriz de la izquierda tiene que estar traspuesta para que sus filas contengan las componentes de los vectores base.

Para cada pareja de vectores $\vec{E_\alpha},\vec{E_\beta}$, los componentes canónicos son respectivamente $\partial x^i/\partial X^\alpha$ y $\partial x^i/\partial X^\beta$.
En la base euclídea los productos escalares son simplemente la suma de los productos componente a componente, así que podríamos pensar en la fórmula: $g_{\alpha\beta}= \partial x^i/\partial X^\alpha.\partial x^i/\partial X^\beta$
El problema es que esta fórmula no respeta la notación tensorial de índices. Del lado derecho hay dos índices sueltos 'i', ambos elevados → esa no es la forma correcta de expresar una suma en 'i'.
Debemos balancear los índices y formular lo siguiente: $g_{\alpha\beta}= \partial x^i/\partial X^\alpha.\ g_{ij}.\ \partial x^j/\partial X^\beta$
Incluso aunque la métrica canónica sea trivial ($g_{ij}=\delta_{ij}$ de Kronecker, matriz identidad), debemos respetar el balance de índices. Esto será importante en ejemplos futuros cuando la métrica canónica no sea tan trivial: $g_{ij}=\eta_{ij}$ en un espaciotiempo de Minkowski.

Nexo entre la notación de índices y la visualización matricial:
Teniendo en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo, podríamos dudar si es válido en esta fórmula $g_{\alpha\beta} = g_{ij}\ .\ \partial x^i/\partial X^\alpha.\partial x^j/\partial X^\beta$ mover g_{ij} al medio de los 2 factores
$g_{\alpha\beta} = g_{ij}\ .\ \partial x^i/\partial X^\alpha.\partial x^j/\partial X^\beta$ $\qquad$ $g_{\alpha\beta} =\partial x^i/\partial X^\alpha.\ g_{ij}\ .\partial x^j/\partial X^\beta$
La respuesta es: sí, es válido. Porque hay una suma implícita de varios productos, y lo que hacemos es reordenar factores dentro de un producto de números, que sí es conmutativo. Los reordenamientos no cambian el resultado final; solo tienen el objetivo de poner uno al lado del otro los índices repetidos, para que llegado el caso de operar se pueda ejecutar (o visualizar) la operación en forma matricial (*la cantidad de filas de la matriz izquierda debe ser igual a la cantidad de columnas de la matriz derecha*). En la fórmula anterior ya están bien emparejados los 2 últimos factores, con los 'j' pegados. Pero no están bien los 2 primeros factores, ya que $\partial x^i/X^\alpha = J^i{}_\alpha$
$g_{\alpha\beta} =J^i{}_\alpha.\ g_{ij}\ .\partial x^j/\partial X^\beta$
Se reconoce que en $J^i{}_\alpha.\ g_{ij}$ hay implícita una suma en 'i', con 'i' arriba y luego abajo bien balanceados.
Pero los 'i' no están pegados. Debemos trasponer y definir un jacobiano traspuesto T=J* tal que $T_\alpha{}^i=J^i{}_\alpha$.
$g_{\alpha\beta} =T_\alpha{}^i.\ g_{ij}\ .\partial x^j/\partial X^\beta \rightarrow g_{\alpha\beta} = T_\alpha{}^i.\ g_{ij}\ .J^j{}_\beta$
Ahora sí la notación de índices se correlaciona totalmente con la visualización matricial, y ambas dictan la receta de que la operación necesaria es [Jac*].[g].[Jac].
A medida que avancemos y ganemos confianza en la notación de índices, muchas veces dejaremos de prestar atención a la reubicación de factores y a las trasposiciones de matrices.

8.1.3 Base dual de vectores:

Dado un vector $\vec{A}$ que pertenece a nuestro espacio, lo expresamos según sus componentes en nuestra base:

$\vec{A}=A^{\alpha}\vec{E_{\alpha}}$.

Definimos vector dual $\tilde{E}^{\lambda}$ como el vector por el que debo proyectar $\vec{A}$ para aislar la componente A^{λ}.

La proyección es un producto escalar, lo que significa que este es un concepto métrico y debe utilizarse el producto escalar definido por la métrica del contexto: $A^{\lambda}=<\vec{A},\tilde{E}^{\lambda}>$.

$A^{\lambda}=<\vec{A},\tilde{E}^{\lambda}>$ →expresamos $\vec{A}=A^{\alpha}\vec{E_{\alpha}}$

$A^{\lambda}=<A^{\alpha}\vec{E_{\alpha}},\tilde{E}^{\lambda}>$ →utilizamos linealidad para quitar factores fuera del < , >

$A^{\lambda}=A^{\alpha}<\vec{E_{\alpha}},\tilde{E}^{\lambda}>$

$A^{\lambda}=A^{\alpha}\delta_{\alpha}^{\ \lambda}$ $\delta_{\alpha}^{\ \lambda}=\delta$ de Kronecker

Esta es la propiedad que necesitamos: $<\vec{E_{\alpha}},\tilde{E}^{\lambda}>=\delta_{\alpha}^{\ \lambda}$

Un vector-λ con proyección nula contra todos los base $\alpha\neq\lambda$ y proyección unitaria contra el $\alpha=\lambda$.

Empecemos por un vector simple, el desplazamiento infinitesimal: $\vec{dS}=dX^{\alpha}\vec{E_{\alpha}}$

Hay una primera receta matemática para encontrar estos vectores duales.

Si tenemos una función de varias variables f(x,y), sus variaciones se expresan con el gradiente ∇f:

$f(\vec{S}+\vec{dS})=f(\vec{S})+\vec{dS}\cdot\nabla f$

$df=f(\vec{S}+\vec{dS})-f(\vec{S})=\vec{dS}\cdot\nabla f$ **→$df=\vec{dS}\cdot\nabla f$**

El cambio a coordenadas oblicuas implica que en cada punto (x,y) estamos definiendo 2 funciones de varias variables: f1=u(x,y), f2=v(x,y). $du=\vec{dS}\cdot\nabla u$ $dv=\vec{dS}\cdot\nabla v$ →$\tilde{E}^{u}=\nabla u$ y $\tilde{E}^{v}=\nabla v$

Los gradientes canónicos de u(x,y) y de v(x,y) son los vectores duales por los que debemos proyectar.

En coordenadas esféricas (capítulo 8.3.5) veremos $\tilde{E}^{r}=\nabla r$, $\tilde{E}^{\theta}=\nabla\theta$ y $\tilde{E}^{\varphi}=\nabla\varphi$.

Recordemos las fórmulas de coordenadas oblicuas (8.1.1)

$dx=du.\cos\theta+dv.\text{sen}\theta$

$dy=du.\text{sen}\theta+dv.\cos\theta$

Para encontrar los diferenciales 'du', 'dv' debemos resolver un sistema de ecuaciones 2x2.

Manualmente multiplicamos una ecuación por cosθ, la otra por senθ, restamos y despejamos:

$du=(dx.\cos\theta-dy.\text{sen}\theta)/D$

$dv=(dy.\cos\theta-dx.\text{sen}\theta)/D$

siendo D=determinante del sistema 2x2 = $\cos^2(\theta)-\text{sen}^2(\theta)=\cos(2\theta)$

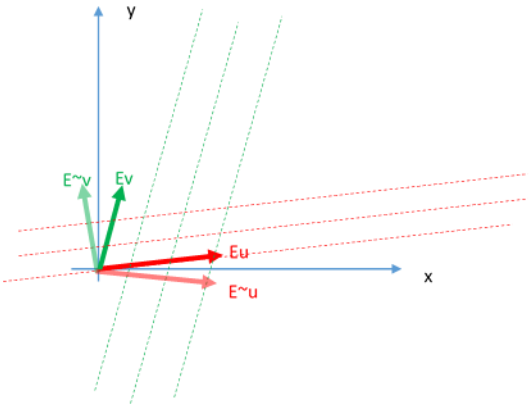
Las fórmulas anteriores significan que, salvo un factor de escala 'D':

la componente "du" se aísla multiplicando escalarmente (dx,dy) por el dual (cosθ, –senθ)

la componente "dv" se aísla multiplicando escalarmente (dx,dy) por el dual (–senθ,cosθ)

El dual $\tilde{E}^{u}$ es ∇u, perpendicular a la familia de rectas punteadas verdes con u=cte

El dual $\tilde{E}^{v}$ es ∇v, perpendicular a la familia de rectas punteadas rojas con v=cte



La figura que se forma guarda algunas similitudes con los diagramas espacio-tiempo de Relatividad Especial (ct,x) vs. (ct',x') con ejes inclinados un ángulo θ tal que $\tan(\theta)=v_o/c$.

i \α	u	v	cosθ senθ	senθ cosθ
x	cosθ/D	-senθ/D	1	0
y	-senθ/D	cosθ/D	0	1

rojo pálido=dual $\tilde{E}^u$ rojo fuerte = base $E_u^{\rightarrow}$ verde fuerte = base $E_v^{\rightarrow}$
verde pálido = dual $\tilde{E}^v$

Un método más formal es utilizar la matriz inversa de la jacobiana, que en notación tensorial se expresa:

$dx^i = dX^\alpha \, .\partial x^i/\partial X^\alpha$ →multiplicamos por jacobiano inverso $\partial X^\lambda/\partial x^i$

$\partial X^\lambda/\partial x^i \, .dx^i = dX^\alpha \, . \, \partial X^\lambda/\partial x^i.\partial x^i/\partial X^\alpha$

$\partial X^\lambda/\partial x^i \, .dx^i = dX^\alpha \, . \, \partial X^\lambda/\partial x^i.\partial x^i/\partial X^\alpha$ →matrices inversas

$\partial X^\lambda/\partial x^i \, .dx^i = dX^\alpha \, . \, \delta^\lambda_\alpha$

$dX^\lambda = \partial X^\lambda/\partial x^i \, .dx^i$ (*esto es la regla de la cadena*)

Un recurso para recordar que las matrices son inversas es:

Jac :$J^i_\alpha = \partial x^i/\partial X^\alpha = \partial(x,y)/\partial(u,v)$ Jac^{-1}:$\tilde{J}^\alpha_i = \partial X^\alpha/\partial x^i = \partial(u,v)/\partial(x,y)$

Para funciones de una sola variable, es inmediato ver que la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada. Si y=f(x), una función tiene derivada dy/dx y su inversa tiene derivada dx/dy.
Para funciones de varias variables la inversión se sigue cumpliendo pero en matrices.

Esta fórmula $dX^\lambda = \partial X^\lambda/\partial x^i \, .dx^i$ nos está dando los componentes del vector dual $\tilde{E}^\lambda$,
pero no podemos simplemente escribir ¿¿ $\tilde{E}^\lambda = \partial X^\lambda/\partial x^i$??
El miembro derecho no es un vector, no tiene ni flecha $^{\rightarrow}$ ni tilde$^{\sim}$ ni acento circunflejo$^{\wedge}$, que son los símbolos que estamos utilizando para vectores. Además tiene un índice 'i' sin balancear.
Nuevamente la notación de índices viene en nuestra ayuda. Incluso en bases canónicas triviales como la euclídea, debemos balancear bien los índices y definir en este caso duales canónicos $\tilde{e}^i$.
Para i=1, 2, 3, estos duales canónicos serían trivialmente iguales a los de la base original.
Si hubiera un cuarto índice i=0 estaríamos en un espaciotiempo Minkowski, ahí la situación no sería tan trivial porque el dual $\tilde{e}^0$ sería el negado del $\hat{e}_0$.

Utilizando los duales canónicos, tenemos la expresión correcta que respeta la notación de índices:
$\tilde{E}^\lambda = \partial X^\lambda/\partial x^i \, . \, \tilde{e}^i$
Que nos está diciendo algo significativo: al pasar de la base canónica (i) a la base genérica (α), la regla de transformación de los duales es contraria a la de los vectores base: se calculan con el jacobiano inverso.
Es decir, se convierten en forma contravariante, haciendo honor a su índice elevado.

Ejemplo:
Podemos imaginar un escenario en el que estos vectores duales revelan su utilidad.
En la sección 1.4.4 llamábamos gradiente al objeto $\partial_\alpha f$ y decíamos que se comportaba en forma covariante.
Ahora deberíamos aumentar la precisión del lenguaje y aclarar que $\partial_\alpha f$ son las componentes covariantes del gradiente de la función 'f'.

Pensemos en las coordenadas oblicuas: ¿cómo podemos sintetizar un gradiente invariante o universal (común a cualquier referencia coordenada) a partir de la pareja de componentes ($\partial_u f$, $\partial_v f$)?
¿O en coordenadas esféricas utilizando la terna ($\partial_r f$, $\partial_\theta f$, $\partial_\varphi f$)?
Veremos que los vectores duales nos dan la respuesta, razonando en base a la notación de índices:

$\nabla f = \partial_i f$? →incorrecto, hay un índice 'i' suelto sin balancear.
Aparte: la expresión de la derecha no es un vector $v^{\rightarrow}$, $\hat{v}$ ni $\tilde{v}$.

$\nabla f = \partial_i f \, \hat{e}_i$? →ahora la expresión derecha es vectorial
pero ambos índices 'i' son bajos, está mal balanceada

$\nabla f = \partial_i f \; . \; \tilde{e}^i$

Esta última expresión está bien balanceada. Veamos cómo se transforma por regla de la cadena.

$\nabla f = \partial_i f \;\; \tilde{e}^i$

$\nabla f = \partial_\alpha f \;\; \partial X^\alpha/\partial x^i \;\; \tilde{e}^i$

$\nabla f = \partial_\alpha f \;\; \partial X^\alpha/\partial x^i \;\; \tilde{e}^i$

$\nabla f = \partial_\alpha f \;\; \tilde{E}^\alpha$ $\qquad\qquad$ $\nabla f = \partial_\alpha f \; . \; \tilde{E}^\alpha$

Ejercicio: Calcular manualmente ∇f en coordenadas oblicuas, a partir de $\partial f/\partial u$ y $\partial f/\partial v$. Tienen que aparecer los duales, con el denominador $D=\cos^2\theta\text{-}\text{sen}^2\theta$

Recordar: En Electromagnetismo y en otras ramas de la Física se utiliza el gradiente de coordenadas esféricas como $\nabla f = \hat{e}_r.\partial_r f + (\hat{e}_\theta/\mathbf{r}).\partial_\theta f + (\hat{e}_\varphi)/\mathbf{(r.sen\theta)}\partial_\varphi f$. Esta fórmula deja claro que los duales no son versores de norma unitaria, y esto está relacionado a que ciertas coordenadas son angulares y las derivadas respecto a ellas no tienen unidades de inverso de distancia como se espera para el gradiente. Los duales tienen que corregir las unidades. Veremos esto con más detalle en 8.3.6 “Coordenadas esféricas”.

Otro ejemplo: Divergencia de un campo vectorial $\nabla \cdot \vec{A}$.

Cuando $\vec{A}$ está expresado en sus componentes canónicos A^i, su divergencia es $\partial_i A^i = \partial_x A^x + \partial_y A^y$

¿Cómo queda en la base genérica, en este caso oblicua? ¿$\partial_u A^u + \partial_v A^v$?

Hagamos los cálculos:

$\nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A^i$ $\qquad$ →transformamos A^i

$\nabla \cdot \vec{A} = \partial_i(\partial x^i/\partial X^\alpha . A^\alpha)$

$\nabla \cdot \vec{A} = \partial_i(\partial x^i/\partial X^\alpha . A^\alpha)$ $\qquad$ →quitamos el jacobiano fuera del operador de derivada (**)

$\nabla \cdot \vec{A} = \partial x^i/\partial X^\alpha \; \partial_i(A^\alpha)$

$\nabla \cdot \vec{A} = \partial x^i/\partial X^\alpha \; \partial_i(A^\alpha)$ $\qquad$ →aplicamos regla de la cadena

$\nabla \cdot \vec{A} = \partial_\alpha(A^\alpha)$

Bien, nos quedó la misma expresión de índices balanceados, ahora en la nueva base genérica.

(**) Pero hubo un paso en el que tuvimos suerte: los coeficientes del jacobiano no dependían del punto del espacio. Para coordenadas curvilíneas la situación va a modificarse.

8.1.4 Métrica dual:

Si los vectores duales pertenecen a nuestro “mundo”, tiene que ser posible expresarlos como combinación lineal de los vectores base. Advertencia: *en algunos materiales consultados sobre Relatividad vimos que los duales son considerados como que pertenecen a otro espacio vectorial llamado “espacio dual”; en ese caso solo sería posible establecer mapeos o correspondencias entre unos y otros pero nunca igualdades*.

No es el enfoque que estamos siguiendo. A efectos prácticos de nuestro trabajo introductorio, consideramos que los vectores duales forman parte de nuestro mismo espacio.

Planteamos para $\tilde{E}^\lambda$ una combinación lineal con coeficientes en principio incógnitos $\tilde{g}^{\lambda\alpha}$.

Y proyectamos con los base $E_\beta^{\rightarrow}$, sabiendo que tiene que dar una δ Kronecker.

$\tilde{E}^\lambda = \tilde{g}^{\lambda\alpha} \; E_\alpha^{\rightarrow}$

$\langle \tilde{E}^\lambda, E_\beta^{\rightarrow} \rangle = \langle \tilde{g}^{\lambda\alpha} \; E_\alpha^{\rightarrow}, E_\beta^{\rightarrow} \rangle$ $\qquad$ →linealidad: quitamos factores hacia fuera de $\langle , \rangle$

$\langle \tilde{E}^\lambda, E_\beta^{\rightarrow} \rangle = \tilde{g}^{\lambda\alpha} \langle E_\alpha^{\rightarrow}, E_\beta^{\rightarrow} \rangle$ $\qquad$ →componente $g_{\alpha\beta}$ del tensor métrico

$\langle \tilde{E}^\lambda, E_\beta^{\rightarrow} \rangle = \tilde{g}^{\lambda\alpha} \; g_{\alpha\beta}$

$\langle \tilde{E}^\lambda, E_\beta^{\rightarrow} \rangle = \tilde{g}^{\lambda\alpha} \; g_{\alpha\beta}$ $\qquad$ →proyección nula contra todos salvo uno

$\delta^\lambda{}_\beta = \tilde{g}^{\lambda\alpha} \; g_{\alpha\beta}$

Entonces lo que estamos precisando es la inversa matricial del tensor métrico.

Se llama tensor métrico dual y se escribe con índices elevados.

Miremos la expresión $\tilde{E}^\lambda = g^{\lambda\alpha} \; E_\alpha^{\rightarrow}$: es como si a los vectores base $E_\alpha^{\rightarrow}$ les estuviéramos “subiendo el índice” para convertirlos en los duales $\tilde{E}^\lambda$, ejecutando la misma operación de elevación de índices que utilizábamos en Relatividad Espacial multiplicando por $\eta^{\lambda\alpha}$.

¿Qué da el producto escalar $<\tilde{E}^{\lambda}, \tilde{E}^{\mu}>$?
Expresamos alguno de ellos en función de los vectores base.

$<\tilde{E}^{\lambda}, \tilde{E}^{\mu}> = <g^{\lambda\alpha} \vec{E_{\alpha}}, \tilde{E}^{\mu}>$ →linealidad

$<\tilde{E}^{\lambda}, \tilde{E}^{\mu}> = g^{\lambda\alpha} <\vec{E_{\alpha}}, \tilde{E}^{\mu}>$ →propiedad de proyección

$<\tilde{E}^{\lambda}, \tilde{E}^{\mu}> = g^{\lambda\alpha} \delta_{\alpha}^{\mu}$ →propiedad de la δ Kronecker

$<\tilde{E}^{\lambda}, \tilde{E}^{\mu}> = g^{\lambda\mu}$

Esta propiedad podría utilizarse como definición alternativa del tensor dual.
Su componente λ,μ contiene el producto escalar de los vectores duales λ,μ.

Los componentes de cada dual son, respectivamente, $\partial X^{\lambda}/\partial x^{i}$ y $\partial X^{\mu}/\partial x^{i}$
Pero como ya vimos en otras ocasiones, el balance de índice no nos permite escribir $g^{\lambda\mu}=(\partial X^{\lambda}/\partial x^{i})(\partial X^{\mu}/\partial x^{i})$.
Tenemos 'i' dos veces abajo y precisamos hacer aparecer explícitamente la métrica dual canónica g^{ij}.
Aunque en este ejemplo sea trivial (matriz identidad), es necesario respetar la notación de índices para estar cubiertos si la métrica canónica es la relativista de Minkowski.

$g^{\lambda\mu}=(\partial X^{\lambda}/\partial x^{i}).g^{ij}.(\partial X^{\mu}/\partial x^{j})$ → Esta fórmula respeta los índices.
Además, está expresada en la forma que esperamos para cualquier magnitud tensorial de 2 índices.
El tensor métrico, como su nombre indica, es un tensor y debe transformarse por las leyes tensoriales.

8.1.5 Subir y bajar índices:

En Relatividad Especial vimos que:

$g_{\alpha\beta}$ Se usa para bajar índices y convertir A^{α} en su versión covariante $A_{\alpha}=g_{\alpha\beta}A^{\beta}$

$g^{\alpha\beta}$ Se usa para subir índices y convertir A_{α} en su versión contravariante $A^{\alpha}= g^{\alpha\beta}A_{\beta}$

Dado un vector en su forma $\vec{A}=A^{\alpha}\vec{E_{\alpha}}$, ¿cómo obtengo sus componentes de índice bajo?
Los componentes de índice alto se lograban proyectando por los duales.
Así que razonando por "dualidad", adivinaríamos que los componentes de índice bajo se deberían obtener proyectando con los vectores base. Podemos comprobarlo:

$\vec{A}=A^{\alpha}\vec{E_{\alpha}}$

$<\vec{A},\vec{E_{\beta}}>=<A^{\alpha}\vec{E_{\alpha}},\vec{E_{\beta}}>$ →linealidad

$<\vec{A},\vec{E_{\beta}}>=A^{\alpha}<\vec{E_{\alpha}},\vec{E_{\beta}}>$

$<\vec{A},\vec{E_{\beta}}>=A^{\alpha}g_{\alpha\beta}$

$<\vec{A},\vec{E_{\beta}}>=A_{\beta}$

Efectivamente, ese es el procedimiento necesario para obtener $A_{\beta}=A^{\alpha}g_{\alpha\beta}$
Las A_{β} se llaman componentes covariantes del vector $\vec{A}$, también podrían llamarse "componentes duales".

Finalmente, en la expresión $\vec{A}=A^{\alpha}\vec{E_{\alpha}}$, podemos bajar los índices de los componentes y subírselos a los vectores base. Formalmente se operaría de la siguiente manera:

$\vec{A}=A^{\alpha}\vec{E_{\alpha}}$

$\vec{A}=g^{\alpha\beta}A_{\beta}\vec{E_{\alpha}}$

$\vec{A}=A_{\beta}\vec{E_{\alpha}}g^{\alpha\beta}$

$\vec{A}=A_{\beta}\tilde{E}^{\beta}$

$\vec{A}=A_{\beta}\tilde{E}^{\beta}$

Esta es otra forma equivalente de expresar un vector, en sus componentes duales y con la base dual.

8.1.6 Coordenadas esféricas:

En este trabajo basamos muchos ejemplos en la geometría esférica porque nos parece que es rica y razonablemente simple sin llegar al extremo de la trivialidad.

Podemos usar estas coordenadas como descripción alternativa de un espacio euclídeo 3D (x,y,z). En ciertas ocasiones nos moveremos únicamente sobre cáscaras superficiales dr=0 r=cte y nuestros grados de libertad serán 2: θ y φ. Para mantener compatibilidad con ambos escenarios, y para evitar trabajar con matrices 3x2 o 2x3 no cuadradas, conservaremos "r" y "dr" tanto como sea posible. Cuando sea oportuno haremos la sustitución explícita r=cte o dr=0.

Para este nuevo sistema de coordenadas repetimos los mismos conceptos:

- cambio de coordenadas
- vectores base y vectores duales
- métrica directa y métrica inversa

El diferencial de línea tiene la forma: $d\vec{S} = d_r.\vec{E_r} + d_\theta.\vec{E_\theta} + d\varphi.\vec{E\varphi}$

Aquí vemos una diferencia inmediata con las coordenadas oblicuas: 2 de las 3 coordenadas son angulares. El $d\vec{S}$ diferencial de desplazamiento coordenado debería tener unidades de distancia (metros), pero dθ y dφ miden radianes. Los vectores base no pueden coincidir con los versores clásicos de norma unitaria, tienen que tener una norma≠1 y que varíe con la posición, para ajustar las unidades.

En notación tensorial esto se escribe como: $d\vec{S} = \vec{E_\alpha}.dX^\alpha$ (suma implícita para α=r, α=θ y α=φ)

Esto tiene la forma exacta de la regla de la cadena:

$d\vec{S} = dr.\partial_r\vec{S} + d\theta.\ \partial_\theta\vec{S} + d\varphi.\partial_\varphi\vec{S}$

$d\vec{S} = \partial_\alpha\vec{S}.dX^\alpha \quad \rightarrow \vec{E_\alpha}=\partial_\alpha\vec{S}$

La identificación es: $\vec{E_r} = \partial_r\vec{S}$ $\vec{E_\theta} = \partial_\theta\vec{S}$ $\vec{E_\varphi} = \partial_\varphi\vec{S}$

Las fórmulas de conversión de coordenadas son:

$x = r.sen(\theta).cos(\varphi)$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$y = r.sen(\theta).sen(\varphi)$ $\quad \theta = arctg[\sqrt{x^2+y^2}\ / z]$

$z = r.cos(\theta)$ $\quad \varphi = arctg(y/x)$

Ejercicio:

Calcular todos los componentes del jacobiano de transformación $J^i_\alpha=\partial x^i/\partial X^\alpha$

i \α	r	θ	φ
x	senθcosφ	r.cosθcosφ	-r.senθsenφ
y	senθsenφ	r.cosθsenφ	r.senθcosφ
z	cosθ	-r.senθ	0

$dS^2 = dX^\alpha . g_{\alpha\beta} . dX^\beta$

Para el tensor métrico vale: $g_{\alpha\beta} = \vec{E_\alpha}\cdot\vec{E_\beta}$

Cada celda o casillero del tensor es un producto escalar entre 2 vectores de la base. Ejemplo: $g_{\theta\varphi}=\vec{E_\theta}\cdot\vec{E_\varphi}$

Matricialmente tenemos el producto del jacobiano traspuesto por el jacobiano (en ese orden):

α \ i	x	y	z	$\vec{Er}$ colu mna	$\vec{E\theta}$ colu mna	$\vec{E\varphi}$ colu mna
r	**$\vec{Er}$-fila**			g_{rr}	$g_{r\theta}$	$g_{r\varphi}$
θ	**$\vec{E\theta}$ fila**			$g_{\theta r}$	$g_{\theta\theta}$	$g_{\theta\varphi}$
φ	**$\vec{E\varphi}$fila**			$g_{\varphi r}$	$g_{\varphi\theta}$	$g_{\varphi\varphi}$

En las coordenadas esféricas el tensor métrico es diagonal, los vectores forman una base ortogonal.

1	0	0
0	r^2	0
0	0	$r^2.sen^2\theta$

La base es ortogonal pero no ortonormal. El único vector base de norma unitaria es $E_r^{\rightarrow}$ porque está asociado a una coordenada que es distancia. Las coordenadas angulares son adimensionadas, lo que implica que sus vectores asociados tienen dimensión de distancia y en la métrica aparecen como distancia al cuadrado.

Los vectores duales son:

$\tilde{E}^r = \nabla r$ $\tilde{E}^\theta = \nabla\theta$ $\tilde{E}^\varphi = \nabla\varphi$

Los gradientes canónicos de estas 3 coordenadas forman las filas de la matriz de vectores duales, también llamada "jacobiano inverso" en otra sección anterior.

Ejemplo de cálculo: Para $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, calculamos su gradiente

$\partial r/\partial x = 1/(2\sqrt{}).2x = 2x/2r = x/r$
$\partial r/\partial y = 1/(2\sqrt{}).2y = y/r$
$\partial r/\partial z = 1/(2\sqrt{}).2z = z/r$
$\tilde{E}^r = (x,y,z)/r$, es un vector que une el origen de coordenadas con el punto 'P' donde estamos y con módulo unitario→ $\tilde{E}^r=E_r^{\rightarrow}$.
El dual coincide con el vector de la base para esta coordenada, y responde a la fórmula $E_r^{\rightarrow}=g_{rr}.\tilde{E}^r$ con $g_{rr}=1$.

Repetimos para $\varphi=arctg(y/x)$:
$\partial\varphi/\partial x = 1/(1+y^2/x^2).(-y/x^2) = -y/(x^2+y^2) = -r.sen\theta.sen\varphi/(r^2sen^2\theta) = -sen\varphi/(r.sen\theta)$
$\partial\varphi/\partial y = 1/(1+y^2/x^2).(1/x) = x/(x^2+y^2) = -r.sen\theta.cos\varphi/(r^2sen^2\theta) = cos\varphi/(r.sen\theta)$
$\partial\varphi/\partial z = 0$
$\rightarrow\tilde{E}^\varphi = \nabla\varphi = [-sen\varphi, cos\varphi, 0]/(r.sen\theta) = E_\varphi^{\rightarrow}/(r^2.sen^2\theta)$
$\tilde{E}^\varphi=E_\varphi^{\rightarrow}/(r^2.sen^2\theta)$→Se verifica $E_\varphi^{\rightarrow}=g_{\varphi\varphi}.\tilde{E}^\varphi$

Ejercicio:
Repetir el cálculo para el vector que falta y demostrar $\tilde{E}^\theta=E_\theta^{\rightarrow}/r^2$, $E_\theta^{\rightarrow}=g_{\theta\theta}.\tilde{E}^\theta$.
Recordar: $\theta=arctg(\sqrt{x^2+y^2}\ /z)$

Con esto armamos la matriz completa (la jacobiana inversa del cambio de coordenadas):
matriz $\tilde{J}^\alpha[i]$ =

```
[Ẽʳ fila          ]
[Ẽᶿ fila          ]
[Ẽᵠ fila          ]
```

En coordenadas esféricas el tensor dual también es diagonal:

1	0	0
0	$1/r^2$	0
0	0	$1/(r^2.sen^2\theta)$

8.1.7 Cordenadas esferoidales:

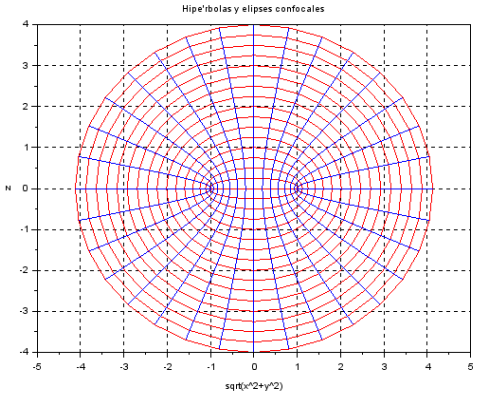
Cuando un astro masivo rota alrededor de sí mismo, como es el caso de la Tierra, la fuerza centrífuga es más intensa en el Ecuador que en los polos. Esto lo lleva a adquirir una forma elipsoidal o esferoidal.
En estas condiciones las superficies equipotenciales se describen mejor con un conjunto de coordenadas (r',θ',φ') llamadas esferoidales o elipsoidales.

Su relación con las coordenadas cartesianas es:

$x^2+y^2 = (r'^2+f^2).sen^2\theta'$

$z=r'.cos(\theta')$

$\varphi=\varphi'$, se mantiene la simetría de revolución alrededor del eje $\vec{z}$.



Cortando con un plano φ=cte, se observa que:

- Los lugares geométricos de igual r'=cte son elipses confocales con distancia focal=2f.
- Los lugares geométricos de igual θ'=cte son hipérbolas que comparten los mismos focos

Cuando nos alejamos de los focos las elipses se vuelven círculos y las hipérbolas se vuelven rectas.
Las coordenadas esferoidales tienden a coincidir con las esféricas cuando $r' \gg f \rightarrow r' \approx r$, $\theta' \approx \theta$.

Podemos repetir los argumentos vistos en este capítulo para deducir que los vectores base son ortogonales y que la métrica es diagonal.

$$(dS)^2 = \rho^2/(r'^2+f^2)(dr')^2 + \rho^2.(d\theta')^2 + (r'^2+f^2).sen^2\theta'.(d\varphi)^2$$

Siendo $\rho^2 = r'^2 + f^2.cos^2\theta'$

Estas coordenadas sirven de base para describir la gravedad en los alrededores de un agujero negro rotatorio, como veremos en el capítulo 12.4 en la sección Métrica de Kerr.

8.1.8 Cordenadas hiperesféricas 4D:

En un espacio 4D tenemos ejes $\{\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{w}\}$, coordenadas (x,y,z,w) y métrica $dS^2=dx^2+dy^2+dz^2+dw^2$.
La distancia al origen es 'r', tal que $r^2=x^2+y^2+z^2+w^2$.
Definimos un nuevo ángulo ξ medido respecto del nuevo eje extradimensional $\hat{w}$ y establecemos las siguientes transformaciones de coordenadas:

$x = r.sen(\xi).sen(\theta).cos(\varphi)$ $\qquad$ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$

$y = r.\ sen(\xi).sen(\theta).sen(\varphi)$ $\qquad$ $\xi = arctg[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ / w]$

$z = r.\ sen(\xi).cos(\theta)$ $\qquad$ $\theta = arctg[\sqrt{x^2+y^2}\ / z]$

$w = r.\ cos(\xi)$ $\qquad$ $\varphi = arctg(y/x)$

La métrica en estas nuevas coordenadas queda:
$dS^2=dr^2+r^2.(d\xi)^2 +r^2.sen^2(\xi).d\theta^2+ r^2.sen^2(\xi).sen^2(\theta).d\varphi^2$
Algunos modelos cosmológicos manejan la idea de que nuestro Universo a gran escala podría tratarse como una "rebanada" 3D de $r=R_U$=constante, embebida en un espaciotiempo 5D con 4 dimensiones espaciales y 1 temporal. Lo que implicaría una curvatura espacial homogénea de valor $1/R_U^2$. Imperceptible a escalas normales debido a que R_U se estima que sería un número enorme del orden de miles de millones de años luz.
En los capítulos 11 y 12 veremos algo sobre este tema.

8.2 Derivada covariante.

En esta sección presentamos 3 escenarios para comenzar a estudiar una nueva derivada que se adapta mejor a las coordenadas curvilíneas. En todos los casos la estructura será la misma: un término base que involucra la derivada coordenada ∂_α + un término extra basado en símbolos "Γ" (gama mayúscula) asociados a la curvatura. Pondremos nombre a esos símbolos Γ y encontraremos fórmulas prácticas para calcularlos.

- Divergencia en coordenadas curvilíneas: $\nabla \cdot \vec{J} = \nabla_\alpha J^\alpha = \partial_\alpha J^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta}.J^\beta$
- Curvas sobre superficies, aceleración: $A^\lambda = DU^\lambda/Ds = dU^\lambda/ds + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}.U^\beta U^\alpha$
- Ecuación de fuerzas: $F^\lambda/m_o = DU^\lambda/D\tau = U^\beta \nabla_\beta U^\lambda = dU^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}.U^\alpha U^\beta$

8.2.1 Divergencia en coordenadas cilíndricas:

Nos situamos en un sistema Σ con coordenadas canónicas (ct,x,y,z), genéricamente definidas como x^i con i=0,1,2,3. Los vectores base son $\hat{e}_i$.

Analizamos una magnitud conservada, por ejemplo el cuadrivector carga-corriente $\mathcal{J}\vec{4}=J^i \hat{e}_i$.

Al pasar a un referencial Σ' con coordenadas cilíndricas (ct,r,φ,z) el cuadrivector es el mismo; lo que cambia son los vectores base y las respectivas componentes $\mathcal{J}\vec{4}=J^\alpha \vec{E_\alpha}$.

La conservación de la carga debería ser algo universal común a cualquier sistema coordenado $\nabla\vec{4} \cdot \mathcal{J}\vec{4}=0$.

Para simplificar los cálculos que siguen a continuación, omitimos la coordenada temporal 'ct' y la tercera coordenada espacial 'z', y nos concentramos únicamente en los planos z=cte.

La cuadri-divergencia del cuadrivector $\nabla\vec{4} \cdot \mathcal{J}\vec{4}$ se simplifica en una divergencia espacial $\nabla \cdot \vec{J}$ 2D.

Enunciamos a continuación las relaciones relevantes para esta geometría; en caso de dudas sugerimos como ejercicio intentar demostrarlas o consultar material específico donde se trate el tema:

$x=r.\cos\varphi$	$r=\sqrt{x^2+y^2}$	$\vec{E_r} = \cos\varphi\, \vec{E_x} + \operatorname{sen}\varphi\, \vec{E_y}$	$\partial_x = \cos\varphi.\partial_r - \operatorname{sen}\varphi/r.\partial_\varphi$
$y=r.\operatorname{sen}\varphi$	$\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)$	$\vec{E_\varphi} = -r.\operatorname{sen}\varphi\, \vec{E_x} + r.\cos\varphi.\vec{E_y}$	$\partial_y = \operatorname{sen}\varphi.\partial_r + \cos\varphi/r.\partial_\varphi$

La expansión explícita del vector espacial es $\vec{J} = J^x.\vec{E_x} + J^y.\vec{E_y} = J^r.\vec{E_r} + J^\varphi.\vec{E_\varphi}$

La relación entre sus componentes es: $J^r = J^x.\cos\varphi + J^y.\operatorname{sen}\varphi$ $\qquad rJ^\varphi = -J^x.\operatorname{sen}\varphi + J^y.\cos\varphi$

La divergencia del campo vectorial es:

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_x J^x + \partial_y J^y$

$\nabla \cdot \vec{J} = (\cos\varphi.\partial_r - \operatorname{sen}\varphi/r.\partial_\varphi)J^x + (\operatorname{sen}\varphi.\partial_r + \cos\varphi/r.\partial_\varphi)J^y$

$\nabla \cdot \vec{J} = (\cos\varphi.\partial_r - \operatorname{sen}\varphi/r.\partial_\varphi)J^x + (\operatorname{sen}\varphi.\partial_r + \cos\varphi/r.\partial_\varphi)J^y$ →agrupamos ∂_r

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r(\cos\varphi.J^x + \operatorname{sen}\varphi.\, J^y) - \operatorname{sen}\varphi/r.\partial_\varphi J^x + \cos\varphi/r.\partial_\varphi J^y$ →reconocemos J^r

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r - \operatorname{sen}\varphi/r.\partial_\varphi J^x + \cos\varphi/r.\partial_\varphi J^y$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r - \operatorname{sen}\varphi/r.\partial_\varphi J^x + \cos\varphi/r.\partial_\varphi J^y$ →derivada de producto

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r - 1/r.\partial_\varphi(\operatorname{sen}\varphi J^x) + \cos\varphi/r.J^x + \cos\varphi/r.\partial_\varphi J^y$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r - 1/r.\partial_\varphi(\operatorname{sen}\varphi J^x) + \cos\varphi/r.J^x + \cos\varphi/r.\partial_\varphi J^y$ →otra derivada de producto

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r - 1/r.\partial_\varphi(\operatorname{sen}\varphi J^x) + \cos\varphi/r.J^x + 1/r.\partial_\varphi(\cos\varphi J^y) + \operatorname{sen}\varphi/r.J^y$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r - 1/r.\partial_\varphi(\operatorname{sen}\varphi J^x) + \cos\varphi/r.J^x + 1/r.\partial_\varphi(\cos\varphi J^y) + \operatorname{sen}\varphi/r.J^y$ →agrupamos ∂_φ

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r + 1/r.\partial_\varphi(-\operatorname{sen}\varphi J^x + \cos\varphi J^y) + \cos\varphi/r.J^x + \operatorname{sen}\varphi/r.J^y$ →reconocemos J^φ

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r + \partial_\varphi J^\varphi + \cos\varphi/r.J^x + \operatorname{sen}\varphi/r.J^y$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r + \partial_\varphi J^\varphi + \cos\varphi/r.J^x + \operatorname{sen}\varphi/r.J^y$ →reconocemos J^r

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r + \partial_\varphi J^\varphi + J^r/r \neq \partial_r J^r + \partial_\varphi J^\varphi$

Esta fórmula está demostrando que ∂_α *no es un operador genuinamente covariante* a pesar de lo que sugiere su notación con índice bajo. Si fuera covariante, $\partial_\alpha J^\alpha$ sería en cualquier base de vectores un invariante igual a la divergencia, y aquí solo se cumple en las coordenadas rectangulares.

La reformulación que estamos necesitando consiste en lo siguiente:

$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla_\alpha J^\alpha = \partial_\alpha J^\alpha$ + otros términos correctores.

Términos que no aparecían en las coordenadas cartesianas de la Relatividad Especial y que son necesarios en coordenadas curvilíneas.

8.2.2 Divergencia en coordenadas curvilíneas:

Generalizamos lo anterior a otras coordenadas.

Partimos de las coordenadas cartesianas, anotadas con minúsculas y con índices latinos: x^i, con 'i' variando entre 1 y 3. También podríamos partir del espacio de Minkowski contemplando una cuarta componente-0 temporal; lo importante es que los vectores base sean constantes al cambiar de un punto a otro, y que la divergencia (ya sea 3D o 4D) pueda expresarse en forma simple como $\nabla \cdot \vec{J} = \partial_i J^i$.

Luego pasamos a nuestras coordenadas curvilíneas anotadas con mayúsculas y con índices griegos X^α.

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_i J^i$ → regla de la cadena $\partial_i = \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial_\alpha$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial_\alpha (J^i)$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial_\alpha (J^i)$ →sustituimos $J^i = \partial x^i/\partial X^\beta . J^\beta$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial_\alpha (\partial x^i/\partial X^\beta . J^\beta)$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial_\alpha (\partial x^i/\partial X^\beta . J^\beta)$ →derivada del producto

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial x^i/\partial X^\beta . \partial_\alpha J^\beta + \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial^2 x^i/(\partial X^\alpha \partial X^\beta) . J^\beta$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial x^i/\partial X^\beta . \partial_\alpha J^\beta + \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial^2 x^i/(\partial X^\alpha \partial X^\beta) . J^\beta$ →producto de jacobianos inversos

$\nabla \cdot \vec{J} = \delta Kron^\alpha{}_\beta . \partial_\alpha J^\beta + \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial^2 x^i/(\partial X^\alpha \partial X^\beta) . J^\beta$

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_\alpha J^\alpha + \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial^2 x^i/(\partial X^\alpha \partial X^\beta) . J^\beta$

Observamos que el índice 'α' aparece una vez arriba y otra vez abajo, nos enfrentamos a una operación de contracción λ=α de una expresión tensorial con un índice 'λ' elevado y 'α','β' bajos.

→definimos	$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \partial X^\lambda/\partial x^i . \partial^2 x^i/(\partial X^\alpha \partial X^\beta)$	caso general
→contraemos λ=α	$\Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta} = \partial X^\alpha/\partial x^i . \partial^2 x^i/(\partial X^\alpha \partial X^\beta)$	caso particular

$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_\alpha J^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta} . J^\beta$

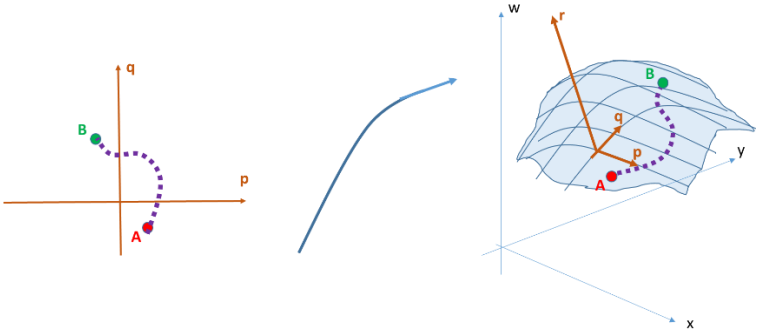
Aquí tenemos una primera pista sobre la naturaleza del término nuevo que hay que sumar. Está claro que solo aparece en coordenadas curvilíneas, cuando hay involucradas **derivadas segundas no nulas ∂^2**: no aparecería en traslaciones, escalados, ni en ejes oblicuos ni en rotaciones por ángulo fijo.

Curiosidad: Podemos extender los razonamientos al espaciotiempo 4D de Minkowski: el término extra corrector tampoco aparecería en las transformaciones de Lorentz de movimiento relativo, porque son matemáticamente equivalentes a una rotación por ángulo fijo (ángulo complejo, pero que no varía con las coordenadas).

El término corrector consiste en una sumatoria en β, para cada β sumamos el producto $tr([C_\beta]) . J^\beta$

$[C_\beta] = \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}$ es una matriz$^\lambda{}_\alpha$ de filas λ y columnas α, y $tr([C_\beta])$ es su traza, resultado de contraer λ=α y sumar.

8.2.3 Curvas sobre superficies:



El marco de trabajo para analizar curvas sobre superficies es el siguiente:

- Para un parámetro de línea 's' definimos 2 coordenadas p(s), q(s).
- Transportamos 'p' y 'q' desde un plano 2D hacia la superficie de r=cte embebida en 3D.

(p,q) cumplen el rol de los (θ, φ) esféricos, o sea los grados de libertad dentro de la superficie.
La 3ra coordenada 'r' identifica nuestra superficie en el espacio 3D. En coordenadas esféricas r=cte sería un casquete esférico, en este contexto puede ser una superficie de forma arbitraria.
En la figura se muestra la trayectoria en trazo punteado violeta.

El diferencial de línea es $d\vec{S} = \vec{E_\alpha}\, dX^\alpha$
Así como usamos al tiempo propio 'τ' para parametrizar las curvas que siguen las partículas materiales en Mecánica Relativista, aquí utilizamos un parámetro "s" que es la longitud de arco.
Los enfoques difieren solo en un factor dimensional 'c', ya que en Relatividad es $(dS)^2 = -(c.d\tau)^2$. Salvo ese factor de escala, los resultados matemáticos son mayormente extrapolables entre una descripción y otra.
A los efectos de este capítulo de curvas sobre superficie, el punto pasa a representar derivada de una coordenada respecto a la longitud de arco.

$\dot{p} = dp/ds \qquad \dot{q} = dq/ds \qquad U^\alpha = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$

Métrica $(dS) = \sqrt{d\vec{S} \cdot d\vec{S}} = ds.\sqrt{d\vec{S}/ds \cdot d\vec{S}/ds}$

La ventaja de utilizar como parámetro a la longitud de arco es que la raíz vale 1.
El (dS) con "S" mayúscula resulta ser el mismo (ds) con "s" minúscula.
Definimos versor tangente a la curva: $\hat{t} = d\vec{S}/ds = \vec{E_\alpha} . dX^\alpha/ds = \vec{E_\alpha} . U^\alpha$
Es análogo a la velocidad pero normalizado, es decir, calibrado para norma unitaria.
Esto nos permite definir una aceleración "*geométrica*", íntimamente relacionada a la curvatura, porque estamos filtrando efectos de aumento o disminución de la rapidez con que se recorre la curva y solo contemplamos el cambio en la dirección del vector. Por ejemplo, cuando se recorre un arco circular con rapidez constante hay aceleración centrípeta apuntando al centro de giro y con magnitud inversamente proporcional al radio de giro, y esa es la parte de la aceleración que nos interesa.

Siguiendo con este desarrollo, definiríamos para una curva: aceleración $\vec{A} = d\hat{t}/ds$
Para calcularla hay que tener la precaución de aplicar la regla de la derivada del producto, porque no solamente puede haber cambio en los U^α sino también en los vectores $\vec{E_\alpha}$. De eso se trata la curvatura.

$\vec{A} = d\hat{t}/ds = d(\vec{E_\alpha}.U^\alpha)/ds$
$\vec{A} = \vec{E_\alpha}. dU^\alpha/ds + d(\vec{E_\alpha})/ds. U^\alpha$
$\vec{A} = \vec{E_\alpha}. dU^\alpha/ds + U^\beta \partial_\beta(\vec{E_\alpha}). U^\alpha$
$\vec{A} = \vec{E_\alpha}. dU^\alpha/ds + \partial_\beta(\vec{E_\alpha}).U^\beta.U^\alpha$

Recurrimos al concepto de derivada viajera, derivada direccional o "$\vec{u} \cdot \nabla$" para sustituir $d/ds = U^\beta \partial_\beta$
Que no es más que una regla de la cadena: $d❖/ds = \partial❖/\partial p.dp/ds + \partial❖/\partial q.dq/ds + \ldots = \partial❖/\partial X^\beta.dX^\beta/ds$
❖ es cualquier objeto: escalar, vector o tensor.

Ahora multiplicamos escalarmente por el dual $\tilde{E}^\lambda$ para aislar la componente A^λ, como vimos en 8.1.3 y 8.1.4:

$\vec{A} = \vec{E_\alpha}. dU^\alpha/ds + \partial_\beta(\vec{E_\alpha}).U^\beta.U^\alpha$
$\tilde{E}^\lambda \cdot \vec{A} = \tilde{E}^\lambda \cdot \vec{E_\alpha}. dU^\alpha/ds + \tilde{E}^\lambda \cdot \partial_\beta(\vec{E_\alpha}).U^\beta.U^\alpha$
$A^\lambda = \delta Kron^\lambda{}_\alpha . dU^\alpha/ds + \tilde{E}^\lambda \cdot \partial_\beta(\vec{E_\alpha}).U^\beta.U^\alpha$
$A^\lambda = dU^\lambda/ds + \tilde{E}^\lambda \cdot \partial_\beta(\vec{E_\alpha}).U^\beta.U^\alpha$

Nuevamente expandimos la derivada direccional como $d/ds = U^\beta \partial_\beta$ y sacamos de factor común U^β.

$A^\lambda = U^\beta . (\partial_\beta U^\lambda + \tilde{E}^\lambda \cdot \partial_\beta(\vec{E_\alpha}).U^\alpha)$

Definimos una cantidad pseudo-tensorial de 3 índices llamada Símbolo de Christoffel
$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \tilde{E}^\lambda \cdot \partial_\alpha(\vec{E_\beta}) = \tilde{E}^\lambda \cdot \partial_\beta(\vec{E_\alpha})$ (α y β son intercambiables)
En base a esta definición sustituimos: $A^\lambda = U^\beta . (\partial_\beta U^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}.U^\alpha)$
Definimos derivada covariante del vector U: $\nabla_\beta U^\lambda = \partial_\beta U^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}.U^\alpha$

Con lo cual nos queda $A^\lambda = U^\beta \nabla_\beta U^\lambda = D/Ds\,(U^\lambda)$

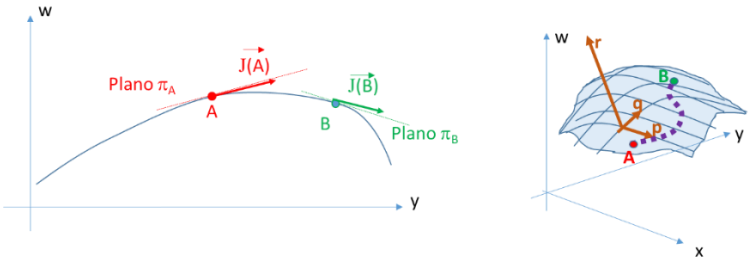
$D/Ds=U^\beta\nabla_\beta$ es la derivada covariante direccional, extensión de la derivada viajera $d/ds = U^\beta\partial_\beta$

Establecemos la siguiente comparación: En un plano las curvas geodésicas o de distancia mínima son las rectas, con derivada de la velocidad igual a 0.
Curvas sobre una superficie no pueden tener derivada nula *porque lo impide la propia curvatura de la superficie*. Pero la superficie es una variedad(n) embebida en un espacio(n+1). Alcanza con que sean nulas las 'n' componentes A^λ de la aceleración contenidas en el plano tangente (en este contexto $A^p=A^q=0$), y la única componente no nula sería la que apunta normal a la superficie local ($A^\lambda\neq0$ para $\lambda=r$).
Esa condición se llama tener "derivada covariante nula", y les otorga a las curvas geodésicas el privilegio de ser lo más parecido a una recta, dentro de las limitaciones que impone la superficie curva.

Ejercicio: Demostrar la relación entre estas 2 últimas secciones:
→8.2.3 curvas sobre superficies: $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}= \tilde{E}^\lambda\cdot\partial_\beta(\vec{E_\alpha})$
→8.2.2 divergencia: $\Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta}=(\partial X^\alpha/\partial x^i).(\partial^2 x^i/\partial X^\alpha\partial X^\beta)$
Sugerencias:

La divergencia de 8.2.2 es un caso particular de 8.2.3, contrayendo $\lambda=\alpha$ y sumando en α.
$\partial x^i/\partial X^\alpha$ son las componentes canónicas del vector $\vec{E_\alpha}$ y $\partial X^\alpha/\partial x^i$, son las componentes del dual $\tilde{E}^\alpha$.

En Teoría de la Relatividad, la derivada covariante permite calcular las curvas geodésicas.
Pero no aplica únicamente a la velocidad; se puede también definir sobre otros cuadrivectores como el de carga-corriente $\boldsymbol{J4}=J^\alpha\vec{E_\alpha}$ o el cuadri-potencial $\boldsymbol{A4}=A^\alpha\vec{E_\alpha}$, o incluso sobre tensores, para formular leyes físicas que involucren derivación.
Es interesante reflexionar sobre lo que significa que un cuadrivector $\boldsymbol{J4}$ o $\boldsymbol{A4}$ "*habite*" sobre una variedad 4D embebida en un espacio 5D. La siguiente figura muestra una simplificación a menos dimensiones, donde el espacio tangente local se ve como un plano tangente.



En un punto 'A' el cuadrivector $\vec{J}$ está contenido en el plano tangente π_A rojo. Al movernos hacia otro punto próximo $B=A+d\vec{S}$, pasamos a un $\vec{J}(B)$ contenido en el nuevo plano tangente π_B verde. El vector diferencia $d\vec{J}=\vec{J}(B)-\vec{J}(A)$ puede tener una componente normal a la superficie, que no está contenida en el plano tangente y que resulta difícil de interpretar físicamente o de incluir dentro de las leyes físicas.
Al realizar la derivación covariante proyectamos la diferencia $d\vec{J}$ sobre los vectores base locales, así nos queda una derivada contenida en el plano tangente local y con sentido físico para sus *habitantes*.

8.2.4 Ecuación de fuerzas:

En Relatividad Especial subir y bajar índices era algo trivial en coordenadas cartesianas, solo debíamos cambiar el signo de algunos valores. En coordenadas curvilíneas la diferencia es mucho más significativa y deben distinguirse bien las componentes covariantes y componentes contravariantes.

Supongamos que una partícula realiza un recorrido descrito en coordenadas esféricas
con velocidad $U^\alpha=(\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi})$ y momento $P^\alpha=m_o.U^\alpha$.
Aquí no hay información métrica completa → salvo $\dot{r}$, las restantes componentes no tienen unidad de velocidad como las conocemos, en metros por segundo.
Las componentes covariantes se obtienen bajando índices:
$U_r=g_{rr}U^r=1.\dot{r}$ $U_\theta=g_{\theta\theta}U^\theta=r^2.\dot{\theta}$ $U_\varphi=g_{\varphi\varphi}U^\varphi=r^2.\mathrm{sen}^2\theta.\dot{\varphi}$
Tampoco tienen todas unidades de velocidad, algunas son momento angular (sin el factor de masa m_o).

Sin embargo, la combinación $U_\alpha U^\alpha$ de la velocidad covariante con la contravariante sí tiene unidades como las conocemos: forma la energía cinética que aparece en el Lagrangeano de la Mecánica Clásica.

$L = \frac{1}{2}.\, m_o.\, [\dot{r}^{\,2} + r^2.(\,\dot{\theta}^{\,2} + sen^2\theta.\dot{\varphi}^{\,2})]$

Observación: Anotamos 'L' la versión 6.5.4 (sin raíz), para distinguirla de la versión $\mathcal{L}$ (con raíz).

Los momentos lagrangeanos son velocidades covariantes, multiplicadas por el factor de escala de la masa.

$$P_\alpha = m_o.U_\alpha$$

Cuando la coordenada es angular, estos momentos son momento angular.

$$P_\theta = \partial L/\partial\dot{\theta} = m_o.r^2.\dot{\theta}$$

$$P_\varphi = \partial L/\partial\dot{\varphi} = m_o.r^2.sen^2\theta.\dot{\varphi}$$

Momento angular es momento de la cantidad de movimiento = brazo $_x$ masa $_x$ velocidad-lineal

El "brazo" del momento es en cada caso el radio respecto al eje de giro:

brazo=r para giros en θ

brazo=r.sen(θ) para giros en φ

Entonces el vector covariante de velocidades es $U_\alpha = (\dot{r}, r^2.\dot{\theta}, r^2.sen^2(\theta).\dot{\varphi})$

Y la energía cinética clásica es $\frac{1}{2}.m_o.U_\alpha.U^\alpha$

En las ecuaciones del trabajo y la energía aparece el producto $F_\alpha U^\alpha$.

Las fuerzas covariantes que aparecen en estas expresiones tienen en este caso unidades de momento (F_θ es momento de giro según el ángulo θ), que al multiplicar por velocidad angular dan potencia.

→La Relatividad General establece un marco unificado de formulación tensorial que contempla en el mismo esquema las coordenadas curvilíneas y los espaciotiempos curvados por acción gravitatoria.

Las ecuaciones de fuerza toman la forma $F_\alpha = dP_\alpha/d\tau - \partial L/\partial X^\alpha$

En el caso de la coordenada radial α=r, tenemos:

$$dP_r/d\tau = F_r + \partial L/\partial r$$

$$dP_r/d\tau = F_r + m_o.r.(\dot{\Omega})^2$$

Subimos índices y nos queda $P^r = g^{rr}.P_r = P_r$, $F^r = g^{rr}.F_r = F_r$

$$dP^r/d\tau = F^r + \mathbf{m_o.r.(\dot{\Omega})^2}$$

$$dP^r/d\tau \neq F^r$$

La desigualdad es provocada en este escenario por el término centrífugo, y es un caso particular de una dificultad general que presentan las coordenadas curvilíneas respecto a las cartesianas: La ecuación de la Relatividad Especial $F^\alpha = dP^\alpha/d\tau$ no resiste un cambio a coordenadas curvilíneas.

Veremos enseguida una nueva derivada temporal simbolizada como $D/D\tau$ que generaliza a $d/d\tau$ y permite reutilizar las mismas fórmulas tensoriales que presentamos en la Relatividad Especial.

$$DP^\alpha/D\tau = F^\alpha$$

La relación a tener en cuenta es: $D/D\tau = d/d\tau$ + otros términos correctores.

Términos que solo son necesarios en coordenadas curvilíneas.

Reflexión-1: Para obtener formulaciones bienvariantes en coordenadas cartesianas, alcanzaba con sustituir d/dt por d/dτ. Ahora no basta con ese recurso, debe pasarse a un D/Dτ.

Reflexión-2: Esto no es muy diferente al recurso que se utilizaba en la Mecánica Clásica de Newton y Galileo, cuando en un sistema acelerado se reutilizaban las mismas ecuaciones de fuerza y aceleración pero agregando términos interpretables como "fuerzas ficticias". Aquí los nuevos términos conviene quitarlos del lado derecho (fuerzas) y moverlos al lado izquierdo (para ser absorbidos por los operadores de derivada).

8.2.5 "Fuerzas" gravitatorias:

La formulación lagrangeana en Relatividad General es: $\mathcal{L}(X^\lambda, \dot{X}^\lambda, \tau) = -m_o.c^2.\sqrt{-U_\alpha U^\alpha/c^2}$

Los momentos dan simplemente $P_\lambda = m_o.U_\lambda$. La simplicidad es solo aparente porque dentro de U_λ está oculta toda la complejidad métrica (a veces mucho más que un simple cambio de signo de cierta coordenada); y eso se revela al querer calcular $dP_\lambda/d\tau$.

$$P_\lambda = m_o.U_\lambda$$

$dP_\lambda/d\tau = m_o.dU_\lambda/d\tau$

$dP_\lambda/d\tau = m_o.d/d\tau(g_{\lambda\beta}U^\beta)$ →derivada del producto

$dP_\lambda/d\tau = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o.d(g_{\lambda\beta})/d\tau.U^\beta$ →derivada en la dirección del movimiento

$dP_\lambda/d\tau = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o.U^\alpha\partial_\alpha(g_{\lambda\beta}).U^\beta$

$dP_\lambda/d\tau = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o.U^\alpha\partial_\alpha(g_{\lambda\beta}).\ U^\beta$ (1)

Por otro lado,

$\partial_\lambda\mathcal{L} = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).(-1/c^2)\partial_\lambda(g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta)$

$\partial_\lambda\mathcal{L} = m_o/2.\partial_\lambda(g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta)$

$\partial_\lambda\mathcal{L} = m_o/2.\partial_\lambda(g_{\alpha\beta}).U^\alpha U^\beta$ (2)

Restando (1) y (2) por la ecuación de Euler Lagrange tenemos

$dP_\lambda/d\tau - \partial_\lambda\mathcal{L} = F_\lambda$ siendo F_λ otras fuerzas de origen no gravitatorio

$F_\lambda = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o.U^\alpha\partial_\alpha(g_{\lambda\beta}).\ U^\beta - m_o/2.\partial_\lambda(g_{\alpha\beta}).U^\alpha U^\beta$

$F_\lambda = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o/2.U^\alpha\partial_\alpha(g_{\lambda\beta}).\ U^\beta + m_o/2.U^\beta\partial_\beta(g_{\lambda\alpha}).\ U^\alpha - m_o/2.\partial_\lambda(g_{\alpha\beta}).U^\alpha U^\beta$

Acabamos de hacer una sustitución un poco atrevida: el término de arriba lo sustituimos por la suma de 2 términos que son iguales, debido a que α y β son índices "*tontos o dummy*" que fueron surgiendo de una expansión y sus roles podían intercambiarse.

$F_\lambda = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o/2.U^\alpha\partial_\alpha(g_{\lambda\beta}).\ U^\beta + m_o/2.U^\beta\partial_\beta(g_{\lambda\alpha}).\ U^\alpha - m_o/2.\partial_\lambda(g_{\alpha\beta}).U^\alpha U^\beta$

$F_\lambda = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o/2.[\ \partial_\alpha(g_{\lambda\beta}) + \partial_\beta(g_{\lambda\alpha}) - \partial_\lambda(g_{\alpha\beta})\ ].U^\alpha U^\beta$

$F_\lambda = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\ U^\alpha U^\beta$

Definimos símbolo de Christoffel de primera especie a la cantidad pseudotensorial con 3 índices bajos

$\Gamma_{\lambda,\alpha\beta} = ½.[\ \partial_\alpha(g_{\lambda\beta}) + \partial_\beta(g_{\lambda\alpha}) - \partial_\lambda(g_{\alpha\beta})\ ]$

8.2.6 Ecuación geodésica:

Finalmente multiplicamos por la métrica inversa para subir los índices.
O sea, multiplicamos por $g^{\mu\lambda}$ y sumamos en λ.

$F_\lambda = m_o.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\ U^\alpha U^\beta$

$g^{\mu\lambda}\ F_\lambda = m_o.\ g^{\mu\lambda}.g_{\lambda\beta}.dU^\beta/d\tau + m_o.\ g^{\mu\lambda}.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\ U^\alpha U^\beta$

$F^\mu = m_o.\ \delta Kron^\mu{}_\beta.dU^\beta/d\tau + m_o.\ g^{\mu\lambda}.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\ U^\alpha U^\beta$

$F^\mu = m_o.\ dU^\mu/d\tau + m_o.\ g^{\mu\lambda}.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\ U^\alpha U^\beta$ →$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\lambda}.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}$

$F^\mu = m_o.\ dU^\mu/d\tau + m_o.\ \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\ U^\alpha U^\beta$

Llamamos símbolo de Christoffel de segunda especie, con 1 índice alto y 2 índices bajos, al resultado de subir índices al símbolo de primera especie: $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\lambda}.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}$

Esto se correlaciona con los resultados de las curvas sobre superficies de la sección 8.2.3

- Ecuación de fuerzas: $F^\lambda/m_o = DU^\lambda/D\tau = U^\beta\nabla_\beta U^\lambda = dU^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}.\ U^\alpha U^\beta$
- Curvas sobre superficies: $A^\lambda = DU^\lambda/Ds = dU^\lambda/ds + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}.\ U^\alpha.U^\beta$

Los símbolos de Christoffel nos aparecen definidos de manera diferente, pero deberían coincidir.

Ejercicio (Advertencia, es trabajoso!!): Demostrar que estos símbolos de Christoffel 8.2.6 de las "fuerzas gravitatorias" son iguales a los hallados en las geodésicas de las curvas sobre superficies 8.2.3.

$\tilde{E}^\mu \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta} = g^{\mu\lambda}.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta} = ½.g^{\mu\lambda}.[\ \partial_\alpha(g_{\lambda\beta}) + \partial_\beta(g_{\lambda\alpha}) - \partial_\lambda(g_{\alpha\beta})\ ]$

Guía: Expresar $\tilde{E}^\mu = g^{\mu\lambda}\vec{E_\lambda}$, y recordar los productos escalares $g_{\lambda\alpha} = \vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\alpha}$, $\delta^\lambda{}_\mu = \tilde{E}^\lambda \cdot \vec{E_\mu}$

A esto que acabamos de formular se lo llama ECUACIÓN GEODÉSICA en el caso en que no hay otras F^μ y solo hay acción gravitatoria.

$F^\mu = m_o.\ [\ dU^\mu/d\tau + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\ U^\alpha U^\beta\ ]$

Podemos sustituir $d/d\tau = \partial_\beta U^\beta$ y hacer aparecer la derivada covariante según fue definida.

$$F^\mu = m_o.U^\beta.[\ \partial_\beta U^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\ U^\alpha\ ] = m_o.U^\beta.\nabla_\beta U^\mu$$

$$F^\mu = m_o.\ DU^\mu/D\tau$$

<u>Derivación alternativa</u>:

Partimos de coordenadas localmente inerciales (y^i) donde se cumple la Relatividad Especial con $d/d\tau$ en lugar de $D/D\tau$: $d^2y^i/d\tau^2=F^i/m_o$

$dU^i/d\tau = F^i/m_o$ $\qquad$ $U^i=dy^i/d\tau$

$d(\partial y^i/\partial X^\alpha U^\alpha)/d\tau = F^i/m_o$ $\qquad$ →derivada del producto

$dU^\alpha/d\tau.(\partial y^i/\partial X^\alpha)+U^\alpha.d/d\tau(\partial y^i/\partial X^\alpha) = F^i/m_o$ $\qquad$ →derivada direccional

$dU^\alpha/d\tau.(\partial y^i/\partial X^\alpha)+U^\alpha.U^\beta\partial_\beta/(\partial y^i/\partial X^\alpha) = F^i/m_o$

$dU^\alpha/d\tau.(\partial y^i/\partial X^\alpha)+U^\alpha.U^\beta.\partial^2 y^i/(\partial X^\alpha\partial X^\beta) = F^i/m_o$ $\qquad$ →multiplicamos por Jacobiano inverso ($\partial X^\lambda/\partial y^i$)

$dU^\alpha/d\tau.(\partial X^\lambda/\partial y^i).(\partial y^i/\partial X^\alpha)+U^\alpha.U^\beta.(\partial X^\lambda/\partial y^i).\partial^2 y^i/(\partial X^\alpha\partial X^\beta) = (\partial X^\lambda/\partial y^i).F^i/m_o$

$dU^\alpha/d\tau.(\partial X^\lambda/\partial y^i).(\partial y^i/\partial X^\alpha)+U^\alpha.U^\beta.(\partial X^\lambda/\partial y^i).\ \partial^2 y^i/(\partial X^\alpha\partial X^\beta) = (\partial X^\lambda/\partial y^i).F^i/m_o$

$dU^\alpha/d\tau.(\delta^\lambda_\alpha)+U^\alpha.U^\beta.\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = F^\lambda/m_o$

$$dU^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\ U^\alpha U^\beta\ = F^\lambda/m_o.$$

Advertimos que para este espacio con métrica Minkowski es importante tener presente que los productos escalares utilizan esa métrica en lugar de la euclídea. El símbolo $\vec{A}\cdot\vec{B}$ se refiere a $<\vec{A},\vec{B}>$.
Una notación que evite la posible confusión sería:

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = <\tilde{E}^\lambda,\partial_\alpha\vec{E_\beta}>= \tfrac{1}{2}.g^{\lambda\sigma}.[\ \partial_\alpha(g_{\sigma\beta}) + \partial_\beta(g_{\sigma\alpha}) - \partial_\sigma(g_{\alpha\beta})\ ]$$

Los productos escalares que permiten demostrar la equivalencia entre ambas definiciones de Christoffel son:
$g_{\lambda\alpha}=<\vec{E_\lambda},\vec{E_\alpha}>$ $\qquad$ $\delta^\lambda_\mu=<\tilde{E}^\lambda,\vec{E_\mu}>$

<u>Reflexión</u>: En el título de esta sección escribimos “fuerza gravitatoria” entre comillas porque no se comporta exactamente igual a las demás fuerzas ante un cambio de coordenadas; estrictamente habría que llamarla “pseudofuerza”. Por la misma razón por la que los símbolos de Christoffel se consideran pseudo-tensores y no tensores genuinos, debido a que no siguen las leyes de transformación esperables para tensores.
El resultado del carácter pseudovectorial o pseudotensorial es que la ecuación de fuerzas de la Relatividad Especial $F^\alpha=dP^\alpha/d\tau$ es incorrecta cuando se utilizan cambios de variable genéricos.
En cambio, la ecuación geodésica $F^\alpha=DP^\alpha/D\tau$ es completamente “bien-variante” porque combina y cancela ambas imperfecciones, puede expresarse en cualquier sistema de coordenadas y resiste cambios de variable.

8.3 Símbolos de Christoffel.

Aplicaremos a las coordenadas esféricas dos métodos para calcular los símbolos de Christoffel: método geodésico y método de vectores base. Que den lo mismo es un caso particular de lo que llamamos "ejercicio trabajoso" en 8.2.6; si queremos convencernos del caso general deberemos realizar los cálculos "trabajosos".

8.3.1 Método de las geodésicas:

De acuerdo con lo visto en la sección 8.2.4, hay 1 ecuación geodésica para cada componente μ de la velocidad: $dU^{\mu}/d\tau + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}U^{\beta} = 0$

El resultado es el mismo si se utiliza la parametrización por tiempo propio para partículas físicas, donde $U^{\mu}=\dot{X}^{\mu}=dX^{\mu}/d\tau$, o a la parametrización por longitud de arco donde $U^{\mu}=\dot{X}^{\mu}=dX^{\mu}/ds$.

Elegimos el primer enfoque pero ignoramos el factor de masa m_o, entonces el Lagrangeano coincide con la energía cinética clásica. $\mathcal{L} = ½.\ [\dot{r}^{\,2} + r^2.(\dot{\theta}^{\,2} + sen^2(\theta).\dot{\varphi}^{\,2})]$

Coordenada radial 'r':

$P_r = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{r} = \dot{r}$

$\partial_r\mathcal{L} = r.\ [\dot{\theta}^{\,2} + sen^2(\theta).\dot{\varphi}^{\,2}]$

$dP_r/d\tau - \partial_r\mathcal{L} = 0$ → $\ddot{r} - r.\dot{\theta}^{\,2} - r.sen^2(\theta).\dot{\varphi}^{\,2} = 0$

Reconocemos la expresión de una forma cuadrática: $dU^r/d\tau + \Gamma^r_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}\, U^{\beta} = 0$

Los símbolos de Christoffel $\Gamma^r_{\alpha\beta}$ son los casilleros de la matriz de la forma cuadrática.

α\β	r	θ	φ	[ṙ] [θ] [φ̇]
r	0	0	0	]
θ	0	-r	0	]
φ	0	0	$-r.sen^2\theta$	]

[ṙ θ̇ φ]

Coordenada polar 'θ':

$P_\theta = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta} = r^2.\dot{\theta}$

$\partial_\theta\mathcal{L} = r^2.\ sen(\theta).cos(\theta).\dot{\varphi}^{\,2}$

$dP_\theta/d\tau - \partial_\theta\mathcal{L} = 0$

$2.r.\dot{r}.\dot{\theta} + r^2.\ddot{\theta} - r^2.\ sen(\theta).cos(\theta).\dot{\varphi}^{\,2} = 0$

$r^2.\ddot{\theta} + 2.r.\dot{r}.\dot{\theta} - r^2.\ sen(\theta).cos(\theta).\dot{\varphi}^{\,2} = 0$ → $\ddot{\theta} + 2/r.\dot{r}.\dot{\theta} - sen(\theta).cos(\theta).\dot{\varphi}^{\,2} = 0$

Los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta}$ quedan visibles en las celdas de la siguiente matriz:

α\β	r	θ	φ	[ṙ] [θ] [φ̇]
r	0	1/r	0	]
θ	1/r	0	0	]
φ	0	0	-senθ.cosθ	]

[ṙ θ̇ φ]

Debe observarse que la matriz contiene un factor 1/r en la celda [r,θ] y también en la celda [θ,r], lo que significa que aparece 2 veces en la expansión de la forma cuadrática: una vez multiplicando a $\dot{r}.\dot{\theta}$ y la otra vez multiplicando a $\dot{\theta}.\dot{r}$, dando así el resultado deseado con factor 2/r.

Coordenada azimutal 'φ':

$P_\varphi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi} = r^2.sen^2(\theta).\dot{\varphi}$

$\partial_\varphi\mathcal{L} = 0$

$dP_\varphi/d\tau - \partial_\varphi\mathcal{L} = 0$

$2.r.\dot{r}.sen^2\theta.\dot{\varphi} + r^2.2.sen\theta.cos\theta.\dot{\theta}.\dot{\varphi} + r^2.sen^2\theta.\ddot{\varphi} = 0$

$r^2.sen^2\theta.\ddot{\varphi}+2.r.\dot{r}.sen^2\theta.\dot{\varphi}+r^2.2.sen\theta.cos\theta.\dot{\theta}.\dot{\varphi}=0 \rightarrow \ddot{\varphi}+2/r.\dot{r}.\dot{\varphi}+2.cos\theta/sen\theta.\dot{\theta}.\dot{\varphi}=0$

Los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\varphi}_{\alpha\beta}$ resultan:

$\alpha\backslash\beta$	r	θ	φ
r	0	0	1/r
θ	0	0	cosθ/senθ
φ	1/r	cosθ/senθ	0

[ṙ θ̇ φ̇]

[ṙ]
[θ̇]
[φ̇]

8.3.2 Método de los vectores base:

En esta sección utilizamos la otra fórmula obtenida en 8.2.3: $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_{\alpha}(E_{\beta}^{\rightarrow})$

Recorremos por orden los valores β=r, β=θ y β=φ, expresando todo como vectores fila:

$S^{\rightarrow}$ = [r.senθ.cosφ, r.senθ.senφ, r.cosθ]

$E_r^{\rightarrow} = \partial_r S^{\rightarrow}$ = [senθ.cosφ, senθ.senφ, cosθ]

$E_\theta^{\rightarrow} = \partial_\theta S^{\rightarrow}$ = [r.cosθ.cosφ, r.cosθ.senφ, -r.senθ]

$E_\varphi^{\rightarrow} = \partial_\varphi S^{\rightarrow}$ = [-r.senθ.senφ, r.senθ.cosφ, 0]

Coordenada radial β=r:

$\partial_r (Er^{\rightarrow})$ = [0, 0, 0]

$\partial_\theta Er^{\rightarrow}$ = [cosθ.cosφ, cosθ.senφ, -senθ] →Reconocemos que $\partial_\theta Er^{\rightarrow} = E_\theta^{\rightarrow}/r$

$\partial_\varphi Er^{\rightarrow}$ = [-senθ.senφ, senθ.cosφ, 0] →Reconocemos que $\partial_\varphi Er^{\rightarrow} = E\varphi^{\rightarrow}/r$

Resta entonces multiplicar la matriz $\partial_\alpha Er^{\rightarrow}$ (a la izquierda, con vectores fila) por la matriz de vectores duales $\tilde{E}^{\lambda}$ (a la derecha, como columnas)

$[C_r]=\Gamma^{\lambda}_{\alpha r} = \partial_\alpha(E_r^i).\ \tilde{E}_i^{\lambda}$

i\λ	r	θ	φ
1	$\tilde{E}r$	$\tilde{E}^{\theta}$	$\tilde{E}^{\varphi}$
2	..	..	..
3	..	..	..

α\i	1	2	3
r	0	0	0
θ	$E_\theta^{\rightarrow}/r$		
φ	$E_\varphi^{\rightarrow}/r$		

[	0	0	0]
[	0	1/r	0]
[	0	0	1/r]

← $\Gamma^{\lambda}_{\alpha r} = \partial_\alpha(E_r^i).\ \tilde{E}_i^{\lambda}$

Coordenada polar β=θ:

$\partial_r E_\theta^{\rightarrow}$ = [cosθ.cosφ, cosθ.senφ, -senθ] $\partial_r E_\theta^{\rightarrow} = E_\theta^{\rightarrow}/r$

$\partial_\theta E_\theta^{\rightarrow}$ = [-r.senθ.cosφ, -r.senθ.senφ, -r.cosθ] $\partial_\theta E_\theta^{\rightarrow} = -r.E_r^{\rightarrow}$

$\partial_\varphi E_\theta^{\rightarrow}$ = [-r.cosθ.senφ, r.cosθ.cosφ, 0] $\partial_\varphi E_\theta^{\rightarrow} = cos\theta/sen\theta.E\varphi^{\rightarrow}$

$[C_\theta]=\Gamma^{\lambda}_{\alpha\theta} = \partial_\alpha(E_\theta^i).\ \tilde{E}_i^{\lambda}$

i\λ	r	θ	φ
1	$\tilde{E}r$	$\tilde{E}^{\theta}$	$\tilde{E}^{\varphi}$
2	..	..	..
3	..	..	..

α\i	1	2	3
r	$E_\theta^{\rightarrow}/r$		
θ	$-r.E_r^{\rightarrow}$		
φ	$cos\theta/sen\theta.E_\varphi^{\rightarrow}$		

[	0	1/r	0]
[	-r	0	0]
[	0	0	ctgθ]

← $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\theta} = \partial_\alpha(E_\theta^i).\ \tilde{E}_i^{\lambda}$

Coordenada azimutal β=φ:

$\partial_r E_\varphi^{\rightarrow}$ = [-senθ.senφ, senθ.cosφ, 0] $\partial_r E_\varphi^{\rightarrow} = E_\varphi^{\rightarrow}/r$

$\partial_\theta E_\varphi^{\rightarrow}$ = [-r.cosθ.senφ, r.cosθ.cosφ, 0] $\partial_\theta E_\varphi^{\rightarrow} = cos\theta/sen\theta.E_\varphi^{\rightarrow}$

$\partial_\varphi E_\varphi^{\rightarrow}$ = [-r.senθ.cosφ, -r.senθ.senφ, 0]

$[C_\varphi]=\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\varphi}=\partial_\alpha(E_\varphi{}^i).\ \tilde{E}_i{}^\lambda$

i\λ	r	θ	φ
1	$\tilde{E}^r$	$\tilde{E}^\theta$	$\tilde{E}^\varphi$]
2	..	..	..]
3	..	..	..]

α\i	1	2	3		
r	$E_\varphi^{\rightarrow}/r$		]	[0 0 1/r]	
θ	$\cos\theta/\text{sen}\theta.E_\varphi^{\rightarrow}$		]	[0 0 ctgθ]	← $\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\varphi}=\partial_\alpha(E_\varphi{}^i).\ \tilde{E}_i{}^\lambda$
φ	$\|-r.\text{sen}\theta.\cos\varphi$	$-r.\text{sen}\theta.\text{sen}\varphi$	0]	$[-r.\text{sen}^2\theta$ $-\frac{1}{2}\text{sen}2\theta$	0]

8.3.3 Divergencia en coordenadas esféricas:

Pensemos en algún vector físico como $\vec{A}$ (potencial electromagnético) o $\vec{J}$ (densidad de corriente).
En Física Clásica es habitual considerar con las mismas unidades a las componentes de esos vectores:

$\vec{A} = a[r].\hat{e}_r + a[\theta].\hat{e}_\theta + a[\varphi].\hat{e}_\varphi$ $\qquad$ $\vec{J} = j[r].\hat{e}_r + j[\theta].\hat{e}_\theta + j[\varphi].\hat{e}_\varphi$

siendo los ê versores de norma unitaria.

En Relatividad los vectores base $\vec{E_\alpha}$ no tienen norma unitaria, se definen diferente.
Las equivalencias para vectores y componentes contravariantes son las siguientes:

$\vec{E_r} = \hat{e}_r$ $\qquad$ $\vec{E_\theta} = r.\hat{e}_\theta$ $\qquad$ $\vec{E_\varphi} = r.\text{sen}\theta.\hat{e}_\varphi$

$J^r = j[r]$ $\qquad$ $J^\theta = j[\theta]/r$ $\qquad$ $J^\varphi = j[\varphi]/(r.\text{sen}\theta)$

$\partial_r J^r + \partial_\theta J^\theta + \partial_\varphi J^\varphi \neq \nabla \cdot \vec{J}$, no es la divergencia correcta a pesar de que las unidades son acertadas.
Están faltando los términos "de curvatura", causados por la variación de los vectores base al pasar de un punto a otro. Ya lo anticipamos en la sección 8.2.1 para las coordenadas cilíndricas. Ahora veremos que la divergencia correcta se obtiene en forma exacta a partir de la derivada covariante, realizando la operación matemática llamada contracción de índices:

$\nabla_\alpha J^\lambda$ $\rightarrow$contracción $\lambda=\alpha$ $\rightarrow$ $\nabla_\alpha J^\alpha$

La contracción va unida a una suma en 'α'.

Coordenada radial λ=r:

$\nabla_\alpha J^r = \partial_\alpha J^r + \Gamma^r{}_{\alpha\beta}.J^\beta$

El término adicional de curvatura es producto matricial del vector J^β con la matriz $\Gamma^r{}_{\alpha\beta}$ que calculamos en la sección 8.3.1.

				[J^r]	
				[J^θ]	
				[J^φ]	
α\β	r	θ	φ		
r	[0	0	0]	[0	]
θ	[0	-r	0]	[$-J^\theta/r$	]
φ	[0	0	$-r.\text{sen}^2\theta$]	[$-r.\text{sen}^2\theta.J^\varphi$	]

La contracción α=r nos dice que debemos tomar solo la fila 'r', que es nula.
Por lo tanto no hay contribución a la divergencia por la parte radial.

Coordenada polar λ=θ:

$\nabla_\alpha J^\theta = \partial_\alpha J^\theta + \Gamma^\theta{}_{\alpha\beta}.J^\beta$

El término adicional de curvatura es producto matricial del vector J^β con la matriz $\Gamma^\theta{}_{\alpha\beta}$.

				[J^r]	
				[J^θ]	
				[J^φ]	
α\β	r	θ	φ		
r	[0	1/r	0]	[X	]
θ	[1/r	0	0]	[J^r/r]	
φ	[0	0	ctgθ]	[X]	

La contracción α=θ nos dice que debemos tomar solo la fila 'θ', marcamos con X las que no importan.
Hay entonces una contribución [J^r/r] de parte de la coordenada polar.

Coordenada azimutal λ=φ:

$$\nabla_\alpha J^\varphi = \partial_\alpha J^\varphi + \Gamma^\varphi{}_{\alpha\beta}.J^\beta$$

El término adicional de curvatura es producto matricial del vector J^β con la matriz $\Gamma^\varphi{}_{\alpha\beta}$.

```
                                  [Jʳ]
                                  [Jθ]
                                  [Jφ]
α\β|   r          θ        φ      .
r  | [0 0        1/r     ][X]
θ  | [0 0        ctgθ    ][X]
φ  | [1/r        ctgθ  0 ][Jʳ/r + ctgθ.Jθ ]
```

La contracción α=φ nos dice que debemos tomar solo la fila 'φ', marcamos con X las que no importan. Hay entonces dos contribuciones `[Jʳ/r + ctgθ.Jθ]` de parte de la coordenada azimutal.

La divergencia completa es entonces la suma de una parte "coordenada" + la parte de "curvatura":

$$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r + \partial_\theta J^\theta + \partial_\varphi J^\varphi + \texttt{extra-r} + \texttt{extra-}\theta + \texttt{extra-}\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r + \partial_\theta J^\theta + \partial_\varphi J^\varphi + 0 + J^r/r + J^r/r + \texttt{ctg}\theta.J^\theta$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = \partial_r J^r + 2.J^r/r + \partial_\theta J^\theta + \texttt{ctg}\theta.J^\theta + \partial_\varphi J^\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 1/r^2.\,\partial_r (r^2.J^r) + 1/\text{sen}\theta.\partial_\theta (\text{sen}\theta.J^\theta) + \partial_\varphi J^\varphi$$

Ejercicio: Repetir estos cálculos usando la otra distribución matricial de Símbolos de Christoffel de la sección 8.5.2. Aparecen contracciones de un tensor llamadas "trazas", que consisten en sumar los elementos de la diagonal. Dado $T^\alpha{}_\beta$, $Tr(T)=T^\alpha{}_\alpha$ = suma en α de los elementos de la diagonal.

Guía de demostración: $\nabla_\alpha J^\alpha = \partial_\alpha J^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta}.J^\beta = \partial_\alpha J^\alpha + tr([C_r]).J^r + tr([C_\theta]).J^\theta + tr([C_\varphi]).J^\varphi$

→La derivada covariante nos permite utilizar coordenadas curvilíneas genéricas para formular ecuaciones en un espacio-tiempo plano como el de Minkowski; y se convierte en una herramienta imprescindible cuando el espacio-tiempo está curvado por efectos gravitatorios.

Reflexión:

Al final de la sección 8.2.6 afirmábamos que los símbolos de Christoffel deben considerarse como pseudo-tensores. ¿Por qué pseudo-tensores? Pensemos en el cálculo que acabamos de realizar para las coordenadas esféricas. Si realizamos un cambio de variable para pasar a coordenadas cartesianas, todos los Christoffel pasan a ser nulos: $\Gamma^i{}_{jk} = 0\ \forall$ i,j,k. Esto nunca podría ocurrir con un tensor genuino. Cuando una magnitud tensorial es nula en un sistema de coordenadas, debería mantenerse nula frente a cualquier cambio de coordenadas.

La regla de transformación que esperamos para un genuino tensor de 3 índices es: $M^\lambda{}_{\alpha\beta} = M^k{}_{ij}.\partial_k X^\lambda.\partial_\alpha x^i.\partial_\beta x^j$ (*observar el balance exacto de índices*). Es una suma en 3 índices i,j,k, una **combinación lineal** de 3^3=27 términos cuando i,j,k recorren el rango de 1 a 3. Si son nulos todos los 27 componentes $M^k{}_{ij}$, no hay ninguna posibilidad de derivadas parciales que sea capaz de romper ese cero → volverían a darnos nulos los 27 componentes del otro referencial $M^\lambda{}_{\alpha\beta}$.

8.4 Análisis tensorial.

El diferencial de línea invariante se puede expresar en componentes covariantes o contravariantes:

$d\vec{S} = \vec{E_\beta} \cdot dX^\beta$ $\qquad\qquad$ $d\vec{S} = dX_\beta \cdot \tilde{E}^\beta$

Las componentes covariantes o contravariantes se obtienen proyectando sobre los vectores base:

$dX_\alpha = d\vec{S} \cdot \vec{E_\alpha}$ $\qquad\qquad$ $dX^\alpha = \tilde{E}^\alpha \cdot d\vec{S}$

Esto vale también para otros vectores $\vec{A}$, $\vec{J}$, …etc. Y sigue valiendo si nos movemos sobre superficies curvas, ya que en un entorno pueden ser asimiladas a un plano (su plano tangente local) y en ese plano tenemos dos bases de vectores: la base de los $\vec{E_\alpha}$ y la base dual de los $\tilde{E}^\alpha$.

$\vec{A} = A_\alpha . \tilde{E}^\alpha$ $\qquad\qquad$ $\vec{A} = \vec{E_\alpha} . A^\alpha$

$A_\alpha = \vec{A} \cdot \vec{E_\alpha}$ $\qquad\qquad$ $A^\alpha = \tilde{E}^\alpha \cdot \vec{A}$

En algunas ocasiones se utilizan los términos análisis y síntesis con el siguiente significado:

- Análisis: Dado un vector $\vec{A}$, obtener sus componentes A^α por proyección $A^\alpha = \tilde{E}^\alpha \cdot \vec{A}$
- Síntesis: Dados los componentes A^α, construir el vector físico mediante combinación $\vec{A} = \vec{E_\alpha} . A^\alpha$

Este mismo tratamiento se le puede aplicar a los tensores.
La síntesis de un tensor a partir de sus componentes $\{T\} = T^{\alpha\beta} . \vec{E_\alpha} \otimes \vec{E_\beta}$ requiere definir una base de productos tensoriales, uno para cada pareja (α,β). No entraremos en este tema porque es más difícil la visualización gráfica.
Nos concentraremos más en el análisis de los tensores, viendo ejemplos de la Física donde aparecen.

8.4.1 Tensor de momento de inercia:

A un sólido rígido se le puede definir un tensor de inercia que depende de su distribución de masas.
Podemos proyectar ese tensor {I} sobre un vector velocidad angular $\vec{w}$, dando como resultado el momento angular $\vec{J}$ en los casos en que hay rotación pura. *(Si el sólido tuviera traslación además de rotación, habría otras contribuciones a $\vec{J}$ que aquí ignoramos).*
Utilizamos como referencia la base cartesiana y armamos un arreglo matricial [I] para representar en forma ordenada los 9 componentes del tensor de inercia.

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Igualmente, podemos ordenar los componentes de la velocidad angular en un arreglo "columna" $[\vec{w}]$.
Entonces la operación $\vec{J} = \{I\}\vec{w}$ (*{I} aplicado a $\vec{w}$*) se puede visualizar como un producto matricial:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix}$$

- $[\vec{J}] = [I].[\vec{w}]$
- $J[i] = I[i,j].w[j]$ $\qquad$ se sobreentiende Σ_j, suma en el índice repetido 'j'

A quienes tengan interés sugerimos repasar en algún material sobre Mecánica las distribuciones de velocidades de un rígido, y consultar el capítulo 15 para refrescar más detalles.
Como orientación mencionamos que lo primero es "*montarnos*" a un sistema de referencia en el cual el sólido tenga un punto quieto, que lo llamamos 'O' y lo elegimos como origen de coordenadas.
Numeramos con índice n=1,2,…N a la porción de materia n-ésima, posición $\vec{r_n}$, masa m_n, velocidad $\vec{u_n}$.
El momento angular es la sumatoria de contribuciones $\vec{J} = \Sigma_n \vec{r_n} \wedge (m_n \vec{u_n})$.
Bajo la hipótesis de que el sólido es 100% rígido (0 deformación), sus puntos mantienen constante la distancia al origen y verifican $\vec{u_n} = \vec{w} \wedge \vec{r_n}$.
Nos queda $\vec{J} = \Sigma_n m_n . \vec{r_n} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r_n})$.

Luego de realizar las operaciones descritas en el capítulo 15 llegamos al resultado:
$[\vec{J}]=[I].[\vec{w}]$, siendo la matriz $[I]= \Sigma_n m_n.(r_n^2[Ident]- \vec{r_n}\otimes\vec{r_n})$. $\otimes$=producto tensorial
El elemento i,j del tensor se expresa como $I[i,j]= \Sigma_n m_n.(r_n^2.\delta Kron[i,j] - x_n[i]x_n[j])$.

8.4.2 Tensor de momento cuadrupolar:

Como en otras "*excursiones*" hacia temas extra-disciplinarios, invitamos a consultar algún texto sobre Electromagnetismo que haga referencia a los conceptos mencionados en esta sección.
Dada una distribución de cargas eléctricas de tamaño finito, su potencial electrostático en puntos remotos $\vec{r}$ con $r \gg r'$ puede aproximarse por el desarrollo multipolar.
Numeramos con índice n=1,2,…N las porciones de carga q_n y posición $\vec{r'_n}$.

Momento de orden-0 $\Sigma_n q_n=Q$=carga neta
Potencial de orden-0 $\Phi(\vec{r})= Q/(4\pi\epsilon_o.r)$
Esta contribución de orden-0 al potencial se obtiene de ejecutar una aplicación escalar que opera sobre el vector posición $\vec{r}$ y le asigna un número.

Momento dipolar $\Sigma_n q_n \vec{r_n} = \vec{p}$
Componentes dipolares $p[i]= \Sigma_n q_n x_n[i]$; i=1,2,3 y las coordenadas son x[1]=x, x[2]=y, x[3]=z.
Potencial dipolar $\Phi(\vec{r})= \vec{p}\cdot\vec{r} /(4\pi\epsilon_o.r^3)$
El momento dipolar tiene carácter vectorial. Su forma elemental son 2 cargas de valor opuesto separadas una distancia $\vec{\ell}$, y ese vector de separación es quien le da el carácter vectorial.
El potencial resulta de ejecutar una aplicación vectorial que toma el vector posición $\vec{r}$ (del punto remoto) y le asigna un número (proporcional a su producto escalar con el momento dipolar $\vec{p}$).

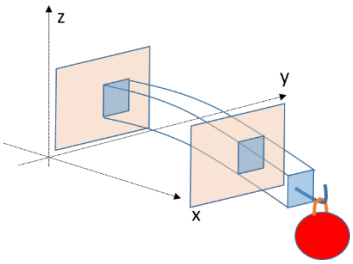
Momento cuadrupolar $[Quad]=\Sigma_n q_n.(3.\vec{r_n}\otimes\vec{r_n} - r_n^2[Ident])/2$
Componentes cuadrupolares $Quad[i,j]=\Sigma_n q_n.(3.x_n[i]x_n[j] - r_n^2.\delta Kron[i,j])/2$
Potencial cuadrupolar $\Phi(\vec{r})=[\vec{r}^*][Quad][\vec{r}] /(4\pi\epsilon_o.r^5)$
La contribución cuadrupolar al potencial resulta de aplicar una forma cuadrática con matriz [Quad] que toma una pareja de vectores ($\vec{r}$ y su traspuesto $\vec{r}^*$) y devuelve un número.

¿Porqué es necesario un tensor para describir al cuadrupolo eléctrico?
Se trata de una pareja de dipolos de momentos opuestos $\vec{p}$ y $-\vec{p}$, separados una distancia $\vec{\ell}$; un solo vector no alcanza para describir la distribución, se precisan 2 vectores.
Hay 9 formas de combinar las 3 direcciones coordenadas de $\vec{p}$ con las 3 direcciones coordenadas de $\vec{\ell}$.
Los cuadrupolos elementales con orientaciones según los ejes coordenados podrían ser, por ejemplo:
Quad[x,x] → 2 dipolos $\vec{p}=p.\hat{x}$ separados $\vec{\ell}=l.\hat{x}$.
Quad[x,y] → 2 dipolos $\vec{p}=p.\hat{x}$ separados $\vec{\ell}=l.\hat{y}$.
Quad[z,x] → 2 dipolos $\vec{p}=p.\hat{z}$ separados $\vec{\ell}=l.\hat{x}$.

Observación:
Tenemos un tensor simétrico con varias celdas redundantes. Por ejemplo, Quad[x,y]=Quad[y,x].
¿Por qué? Pensemos en un arreglo de 4 cargas ocupando vértices de un cuadrado (-d,-d), (-d,d), (d,d), (d,-d).
+q −q
−q +q
Podría verse como dos dipolos verticales separados en horizontal, o como dos dipolos horizontales separados en vertical. En el cálculo del momento Qxy de esta distribución aparecen los productos x*y de las posiciones de las cargas. Que son iguales a los productos y*x necesarios para calcular el momento Qyx (los términos x^2+y^2 no rompen la simetría).

8.4.3 Tensor de tensiones en un material:

Este escenario fue el primero que surgió en la Física y motivó el nombre tensor para describir el estado tensional. En el capítulo 10 veremos que este tensor 3x3 se puede generalizar a 4 dimensiones, para formar parte del llamado *tensor de energía-impulso*.
En la figura se representa una viga sostenida desde una pared y con un peso colgante en su extremo.



En cada punto del sólido su estado se describe por una matriz

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

El casillero $\sigma[i,j]$ mide la componente 'j' de la fuerza por unidad de área a través de superficies que tienen constante la coordenada 'i'. Los elementos de la diagonal i=j se asocian típicamente a una presión. Los elementos fuera de la diagonal i≠j se asocian a tensiones rasantes o esfuerzos cortantes; por ejemplo viscosidad en los fluidos, aunque puede haber de otro tipo.

Al cortar con un plano x=cte y vector normal $\vec{n}$ de componentes cartesianas (1,0,0) se obtiene una fuerza $\vec{f_s}=\Delta_y.\Delta_z.\ \vec{n}\cdot\{\sigma\}$ que resulta de proyectar el tensor $\{\sigma\}$ multiplicando a la izquierda por el vector explorador $\vec{n}$.
Esta $\vec{f_s}$ es una especie de "fuerza superficial" que cruza la frontera y su valor es el empuje que la porción derecha ejerce sobre la izquierda. La fuerza ejercida sobre el extremo derecho colgante es opuesta $-\vec{f_s}$.
El producto matricial del vector por el tensor es $[\vec{n}]\cdot[\sigma]$:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

Si sumamos las contribuciones de cada una de las superficies que limitan al bloque sólido colgante y aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss, tenemos $\iint_{Sup}\vec{n}\cdot\{\sigma\}.dSup = -\iiint_{Vol}\nabla\cdot\{\sigma\}.dVol$
La divergencia del tensor de tensiones se interpreta entonces como fuerza por unidad de volumen, con un signo negativo debido a que el vector $\vec{n}$ de la figura fue definido como entrante al material.

¿Qué es la divergencia de un tensor? Lo más sencillo es verlo en coordenadas cartesianas:
es el resultado de "proyectar" este tensor $\{\sigma\}$ aplicando a la izquierda el operador de derivadas parciales.

$$-\vec{f_{Vol}} = \nabla\cdot\{\sigma\} \qquad -f[j]=\partial_{[i]}\sigma[i,j]$$

$$\begin{bmatrix}\partial_x & \partial_y & \partial_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-f_x & -f_y & -f_z\end{bmatrix}$$

Este enfoque nos permite interpretar al tensor como una aplicación que actúa sobre vectores (ya sea proyectando por la izquierda o por la derecha) y devuelve vectores.

8.4.4 Componentes de un tensor:

Se puede avanzar más sobre esta interpretación: si al tensor de segundo rango lo proyectamos con un vector a la izquierda y con otro vector a la derecha → lo que obtenemos es un número, un escalar. El tensor se identificaría como una aplicación que actúa sobre 2 vectores de una cierta base y devuelve un número.

La expresión matemática es similar a las formas cuadráticas $\langle \vec{E_\alpha}, \vec{E_\beta} \rangle$.
Sea {g} un tensor al que le aplicamos $\vec{E_\alpha} \cdot \{g\} \cdot \vec{E_\beta}$ y obtenemos, para cierta pareja de índices α y β, el número $g_{\alpha\beta} = \vec{E_\alpha} \cdot \{g\} \cdot \vec{E_\beta}$.
(*para que el producto matricial sea efectivamente un escalar es necesario realizar trasposiciones de vectores, tal que el vector de la izquierda sea una fila y el vector de la derecha una columna*).
Si {g} es la métrica cartesiana/euclideana del espacio de coordenadas canónicas y su representación matricial [g] es la matriz identidad, entonces $g_{\alpha\beta}$ nos da las componentes doblemente covariantes del tensor métrico en la base de las coordenadas X^α.
Análogamente podríamos proyectar a la derecha y a la izquierda por los vectores duales, y obtendríamos las componentes contravariantes del tensor métrico: $g^{\alpha\beta} = \tilde{E}^\alpha \cdot \{g\} \cdot \tilde{E}^\beta$

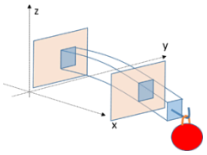
Repitiendo esta idea para cualquier tensor {T}, definimos:

$T_{\alpha\beta} = \vec{E_\alpha} \cdot \{T\} \cdot \vec{E_\beta}$	son las componentes covariantes sobre nuestra base
$T^{\alpha\beta} = \tilde{E}^\alpha \cdot \{T\} \cdot \tilde{E}^\beta$	son las componentes contravariantes sobre nuestra base
$T_\alpha{}^\beta = \vec{E_\alpha} \cdot \{T\} \cdot \tilde{E}^\beta$	son las componentes de varianza mixta, α=bajo β=elevado
$T^\alpha{}_\beta$ = ¿Qué es?	

8.4.5 Gradiente de un vector:

El gradiente de un vector es un caso particular de uno de los tantos escenarios físicos en los cuales surge la necesidad de introducir magnitudes tensoriales para su descripción.
Ejemplo: Los sólidos sometidos a esfuerzos tienen asociado un campo vectorial de desplazamientos $\vec{\delta}$, y el gradiente de ese vector $\nabla\vec{\delta}$ se relaciona con el tensor de tensiones del material {σ} a través de una constante de proporcionalidad 'μ_e' que depende de la elasticidad del material (de manera similar a como vimos en el modelo del colchón de resortes del capítulo 7.4.2). La fuerza volumétrica o divergencia del tensor {σ} sería proporcional al laplaciano del desplazamiento (resultado visto en 7.4.2).

En la viga de la figura 8.3.2 podemos observar que una componente importante de σ_{xz} es $\mu_e.\partial_x\delta_z$.



El peso colgante produce $\partial_x\delta_z$, desplazamientos esencialmente verticales (δ_z) que varían ∂_x al recorrer la coordenada-x debido a la forma en que la viga se arquea o flexiona. Eso contribuye a σ_{xz}, es decir, fuerzas-z cuando cortamos con superficies de normal-x.
Otro componente del gradiente es $\partial_z\delta_x$, las fibras horizontales en dirección $\vec{x}$ tienen una tensión variable con la coordenada-z: las más altas están traccionadas y las más bajas están comprimidas.

En general el gradiente de un vector $\nabla\vec{A}$ es un objeto difícil de interpretar, a no ser que lo proyectemos sobre ciertas direcciones para reducirlo a objetos conocidos como vectores o escalares.

$\vec{u} \cdot \nabla\vec{A}$ = es la derivada direccional de $\vec{A}$ en dirección de $\vec{u}$, que podríamos anotar "$\partial\vec{A}/\partial\vec{u}$" o $\partial_{\vec{u}}\vec{A}$.
Corresponde al límite de variación de $\vec{A}$ cuando nos movemos un desplazamiento $ds.\vec{u}$:

$$\vec{A}(\vec{r}+ds.\vec{u}) \approx \vec{A}(\vec{r})+ds.\vec{u} \cdot \nabla\vec{A}$$
$$\vec{u} \cdot \nabla\vec{A} = \lim_{ds\to 0} [\vec{A}(\vec{r}+ds.\vec{u}) - \vec{A}(\vec{r})] / ds$$

En el caso de que $\vec{u}$ coincide con alguno de los versores de la base canónica, tenemos:

- $\vec{u}=\hat{x} \quad \to \vec{u} \cdot \nabla\vec{A} = \partial\vec{A}/\partial x = \partial_x \vec{A}$

Si en lugar de la proyectar por la izquierda proyectamos por la derecha con un vector fijo*(*)* $\vec{v}$, tenemos

$$(\nabla\vec{A}) \cdot \vec{v} = \nabla (\vec{A} \cdot \vec{v}) = \nabla A[v]$$

(*) $\vec{v}$ no debe variar en el espacio, sólo así puede entrar dentro de la derivación sin verse afectado.

Finalmente, la doble proyección da: $\vec{u}\cdot(\nabla\vec{A})\cdot\vec{v} = \partial_{[u]}\, A[v]$

Visualización matricial del gradiente de un vector:

i\j	1	2	3
1	$\partial_1 A_1$	$\partial_1 A_2$	$\partial_1 A_3]$
2	$\partial_2 A_1$	$\partial_2 A_2$	$\partial_2 A_3]$
3	$\partial_3 A_1$	$\partial_3 A_2$	$\partial_3 A_3]$

Por columnas:

i\j	1	2	3
1	∇A_x	∇A_y	$\nabla A_z]$
2	..	..	..]
3	..	..	..]

Al proyectar a la derecha con el vector de la base canónica $\vec{v}$=[0,1,0] columna, nos da la columna ∇A_y .

Por filas:

i\j	1	2	3
1	$\partial_x\vec{A}$		]
2	$\partial_y\vec{A}$		]
3	$\partial_z\vec{A}$		]

Cuando proyectamos a la izquierda con el vector de la base canónica $\vec{u}$=[0,0,1] fila, nos da la fila gris $\partial_z\vec{A}$.
La naturaleza tensorial del gradiente de un vector $\nabla\vec{A}$ se manifiesta a través de la necesidad de utilizar dos índices para su descripción ∂_i A[j]:

"i" coordenada respecto a la cual variamos ∂_i

"j" componente del vector A[j] que variamos

Veamos entonces lo que ocurre cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son nuestros vectores de la base curvilínea (genérica).
Tenemos 4 combinaciones según si elegimos los vectores de la base primaria o los de la base dual. Si le ponemos una letra identificatoria al tensor "gradiente de $\vec{A}$ " {G}=$\nabla\vec{A}$, sus posibles componentes serían:

$\vec{u}$=primario, $\vec{v}$=primario	$G_{\alpha\lambda} = E_\alpha\cdot\{G\}\cdot E_\lambda$	= se anota	$\nabla_\alpha A_\lambda$
$\vec{u}$=primario, $\vec{v}$=dual	$\mathbf{G_\alpha{}^\lambda = E_\alpha\cdot\{G\}\cdot\tilde{E}^\lambda}$		$\mathbf{= \nabla_\alpha A^\lambda}$
$\vec{u}$=dual, $\vec{v}$=primario	$G^\alpha{}_\lambda = \tilde{E}^\alpha\cdot\{G\}\cdot E_\lambda$		$= \nabla^\alpha A_\lambda$
$\vec{u}$=dual, $\vec{v}$=dual	$G^{\alpha\lambda} = \tilde{E}^\alpha\cdot\{G\}\cdot\tilde{E}^\lambda$		$= \nabla^\alpha A^\lambda$

Nos concentramos en la opción resaltada en color rojo.

Utilizamos $\vec{u} = E_\alpha$ para que el primer índice α quede covariante

Utilizamos $\vec{v} = \tilde{E}^\lambda$ para que el segundo índice λ quede contravariante

La primera proyección nos da $E_\alpha\cdot\nabla\,\vec{A} = \partial_\alpha\,\vec{A}$

La segunda proyección por $\tilde{E}^\lambda$ nos da la componente de índice elevado 'λ' del vector anterior.

Partimos de los componentes canónicos, donde el tensor gradiente se describe como $G_i{}^j = \partial_i A^j$

$G_i{}^j = \partial_i A^j$ →1ra proyección por E_α, componentes $\partial x^i/\partial X^\alpha$

$\partial x^i/\partial X^\alpha\, G_i{}^j = \partial x^i/\partial X^\alpha\, \partial_i A^j$ →regla de la cadena

$\partial x^i/\partial X^\alpha\, G_i{}^j = \partial_\alpha A^j$ →2da proyección por $\tilde{E}^\lambda$, componentes $\partial X^\lambda/\partial x^j$

$\partial x^i/\partial X^\alpha\, G_i{}^j\, \partial X^\lambda/\partial x^j = \partial_\alpha A^j\, \partial X^\lambda/\partial x^j$

$\partial x^i/\partial X^\alpha\, G_i{}^j\, \partial X^\lambda/\partial x^j = \partial_\alpha A^j\, \partial X^\lambda/\partial x^j$

Al miembro izquierdo lo identificamos como $G_\alpha{}^\lambda = \partial x^i/\partial X^\alpha\, G_i{}^j\, \partial X^\lambda/\partial x^j$.
Esta es la regla de transformación de componentes que esperamos para cualquier tensor bien comportado.
Hay tantas derivadas parciales como cantidad de índices, y las variables van arriba o abajo en la derivada según cómo lo indican los índices.

$G_\alpha{}^\lambda = \partial_\alpha(A^j)\ \partial X^\lambda/\partial x^j$ →transformamos $A^j=\partial x^j/\partial X^\beta\ A^\beta$

$G_\alpha{}^\lambda = \partial_\alpha(\partial x^j/\partial X^\beta\ A^\beta)\ \partial X^\lambda/\partial x^j$ →Aplicamos derivada del producto:

$G_\alpha{}^\lambda = [\partial_\alpha A^\beta(\partial x^j/\partial X^\beta) + \partial_\alpha(\partial x^j/\partial X^\beta)A^\beta].\partial X^\lambda/\partial x^j$ →expandimos

$G_\alpha{}^\lambda = \partial_\alpha A^\beta(\partial X^\lambda/\partial x^j.\partial x^j/\partial X^\beta) + \partial_\alpha(\partial x^j/\partial X^\beta)A^\beta.\partial X^\lambda/\partial x^j$ → matrices jacobianas inversas

$G_\alpha{}^\lambda = \partial_\alpha A^\beta(\delta^\lambda{}_\beta) + \partial_\alpha(\partial x^j/\partial X^\beta).\partial X^\lambda/\partial x^j.A^\beta$ →"*colapsamos*" la δ Kronecker

$G_\alpha{}^\lambda = \partial_\alpha A^\lambda + \partial_\alpha(\partial x^j/\partial X^\beta).\partial X^\lambda/\partial x^j.A^\beta$ →re-expresamos

$G_\alpha{}^\lambda = \partial_\alpha A^\lambda + \partial X^\lambda/\partial x^j.\partial^2 x^j/(\partial X^\alpha \partial X^\beta)A^\beta$

Reconocemos un símbolo de Christoffel $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \partial X^\lambda/\partial x^j.\partial^2 x^j/(\partial X^\alpha \partial X^\beta)$ y sustituimos:

$$E_\alpha^{\rightarrow} \cdot \nabla A^{\rightarrow} \cdot \tilde{E}^\lambda = G_\alpha{}^\lambda = \partial_\alpha (A^\lambda) + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} \,.\, A^\beta$$

Y esto es lo que llamamos $\nabla_\alpha A^\lambda$ en la sección 8.2.3

Llegamos a la misma fórmula de la DERIVADA COVARIANTE.

La derivada covariante de un vector es la proyección de su gradiente sobre nuestros vectores base.

Sus componentes se anotan $\nabla_\alpha A^\lambda$ y se calculan por la fórmula basada en los símbolos de Christoffel.

Un momento importante de este desarrollo fue cuando aplicamos la derivada del producto.

Debido a que estamos trabajando en geometrías curvas, *los vectores de la base cambian de un punto a otro y su variación contribuye a la derivada total, además de la variación de los componentes*.

La proyección del gradiente no da exactamente $\partial_\alpha (A^\lambda)$, lo que significa que frente a transformaciones de coordenadas esta cantidad no es bien comportada ("*bien variante"* lo llamamos en otras ocasiones). Porque ∂_α no es genuinamente covariante a pesar de lo que sugiere su notación con sub-índices (solo es covariante cuando aplica sobre un escalar); en cambio ∇_α sí es genuinamente covariante (incluso cuando opera sobre vectores) y de ahí surge su nombre.

Advertencia sobre nomenclatura:

En muchos materiales consultados vimos que $\nabla^\alpha A^\lambda$ no se llama "derivada contravariante". Se utiliza el mismo nombre "derivada covariante" y se aclara de alguna manera que se trata de derivada de índice alto.

Lo que está ocurriendo es que muchos autores utilizan la expresión "covariante" para referirse a lo que nosotros en este trabajo llamamos "bien-variante", es decir, "bien comportado" frente a las reglas de transformación.

Con ese mismo criterio, al conjunto de fórmulas que vimos en el capítulo 5 lo suelen llamar "Formulación Covariante del Electromagnetismo", aunque en ocasiones algunos índices aparezcan altos como $F_\alpha = q.F_{\alpha\beta}.U^\beta$. Simplemente es otra forma de referirse a "Formulación Tensorial".

8.4.6 Derivada covariante de un tensor:

La derivada covariante que acabamos de exponer aplica sobre un tensor contravariante de rango 1.

Es posible extender el concepto a tensores covariantes de rango 1, o a tensores de mayor rango con cualquier varianza en sus índices.

La regla es que a la derivada coordenada se le agrega una expansión de términos basados en símbolos de Christoffel, donde cada índice aporta un término que suma si es contravariante o resta si es covariante.

$$\nabla_\alpha A^\beta = \partial_\alpha (A^\beta) + \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} \,.\, A^\mu \qquad \nabla_\alpha A_\beta = \partial_\alpha (A_\beta) - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \,.\, A_\mu$$

$$\nabla_\alpha T^{\rho\sigma} = \partial_\alpha (T^{\rho\sigma}) + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu} \,.\, T^{\rho\mu} + \Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} \,.\, T^{\mu\sigma} \qquad \nabla_\alpha T_{\rho\sigma} = \partial_\alpha (T_{\rho\sigma}) - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \,.\, T_{\rho\mu} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \,.\, T_{\mu\sigma}$$

$$\nabla_\alpha T_\rho{}^\sigma = \partial_\alpha (T_\rho{}^\sigma) \pm \text{¿?....}$$

Ejercicio: Intentar demostrar alguna de estas fórmulas. *Sugerencia*: Probar producto tensorial $T^{\alpha\beta}=A^\alpha B^\beta$.

Ejercicio: Hacer la derivada covariante de un escalar por un vector $\nabla_\alpha (f.A^\beta)$, debe darnos el resultado esperado para la derivada de un producto (regla de Leibniz).

8.4.7 Tensores de rango >2:

Advertimos que para tensores de mayor rango, es decir, con 2 o más índices, la visualización matricial comienza a perder eficacia. Igual que la acción de proyectar "por la derecha" o "por la izquierda", ya que también habría que definir "*proyectar por el medio*". Además de que el hecho de proyectar supone multiplicar escalarmente usando la métrica. En varios pasajes de este capítulo anotamos $\vec{u} \cdot \vec{v}$, que es una notación más simple que $<\vec{u},\vec{v}>$ pero engañosa porque puede inducirnos a confusión creyendo que se trata del producto escalar cartesiano.

La generalización más robusta se basa en la idea de una transformación multilineal que toma cierta cantidad de vectores como entrada y devuelve un número como salida. Los vectores de entrada irían ordenados, como los "argumentos" de llamada a una función en los lenguajes informáticos. Ejemplo: $\{M\}(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$.

Para obtener las componentes de un tensor en cierta base, lo aplicamos sobre los vectores base o duales. Si en el cubículo correspondiente al primer argumento ponemos un vector base $\vec{E_\lambda}$, el componente resultante tendrá un primer índice bajo. Si ponemos el vector dual $\tilde{E}^\lambda$, tendrá un primer índice elevado. El mismo criterio se seguiría para el segundo y tercer casillero de la función. Ejemplos:

$M^\lambda{}_{\mu\sigma} = \{M\}(\tilde{E}^\lambda, \vec{E_\mu}, \vec{E_\sigma})$
$M_\lambda{}^\mu{}_\sigma = \{M\}(\vec{E_\lambda}, \tilde{E}^\mu, \vec{E_\sigma})$
$M_{\lambda\mu}{}^\sigma = \{M\}(\vec{E_\lambda}, \vec{E_\mu}, \tilde{E}^\sigma)$

Los tensores, vistos como una función, deben ser invariantes frente a cualquier transformación de coordenadas. Los que varían son sus componentes acordes a cada base; *y no varían de cualquier manera sino según una regla bien definida de transformación tensorial*.

Trataremos de mantener orden en la notación para distinguir los conceptos:

$\{M\}$	: tensor invariante
$\vec{J}$, $\vec{w}$	: vectores invariantes
$\vec{J}=\{M\}\vec{w}$, $\vec{J}=\{M\}(\vec{w})$	: es una ley física invariante expresada en forma tensorial en este caso es como una transformación lineal, "$\{M\}$ opera sobre $\vec{w}$".
$[M]$	: arreglo matricial con las componentes del tensor, en cierta base sería la "matriz asociada" a la transformación lineal
$[\vec{J}]$, $[\vec{w}]$	: arreglos matriciales (fila o columna) que contienen las componentes de $\vec{J}$, $\vec{w}$
$[\vec{J}]=[M].[\vec{w}]$	: formulación matricial de la ley física
$M^\alpha{}_\beta$, J^α, w^β	: componentes en cierta base
$J^\alpha=M^\alpha{}_\beta \, . \, w^\beta$	: la ley física expresada en componentes

RESUMEN DE TRANSFORMACIONES TENSORIALES:

	Cuadrivectores:
$A^\beta = \partial X^\beta/\partial X'^\mu \; A'^\mu$	cambio de base, componentes contravariantes
$A_\alpha = A'_\lambda \; \partial X'^\lambda/\partial X^\alpha$	cambio de base, componentes covariantes
$A^\alpha = g^{\alpha\lambda} \, A_\lambda$	subida de índice
$A_\beta = A^\mu \, g_{\mu\beta}$	bajada de índice
	Tensores:
$M^{\alpha\beta} = M'^{\lambda\mu} \; \partial X^\alpha/\partial X'^\lambda . \partial X^\beta/\partial X'^\mu$	cambio de base, componentes contravariantes
$M^\alpha{}_\beta = M'^\lambda{}_\mu \; \partial X^\alpha/\partial X'^\lambda . \partial X'^\mu/\partial X^\beta$	cambio de base, componentes mixtas
$M_{\alpha\beta} = M'_{\lambda\mu} \; \partial X'^\lambda/\partial X^\alpha . \partial X'^\mu/\partial X^\beta$	cambio de base, componentes covariantes
$M^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\lambda} \, M_{\lambda\beta}$	subida de índice
$M^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda} \, M_{\lambda\mu} \, g^{\mu\beta}$	subida doble de índices
$M^\alpha{}_\beta = M^{\alpha\mu} \, g_{\mu\beta}$	bajada de índice
$M_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda} \, M^{\lambda\mu} \, g_{\mu\beta}$	bajada doble de índices
$\partial X^\alpha/\partial X'^\lambda . \; \partial X'^\lambda/\partial X^\beta = \delta^\alpha{}_\beta$	jacobianos inversos de transformación
$g^{\alpha\lambda} . g_{\lambda\beta} = \delta^\alpha{}_\beta$	tensor dual inverso del métrico

8.5 Geometrías no euclideanas.

Estudiamos en esta sección una serie de fenómenos que cambian en forma considerable cuando pasamos de geometrías euclideanas a superficies con curvatura:

- Suma de ángulos de un triángulo
- Longitud de una circunferencia
- Deriva geodésica
- Transporte paralelo

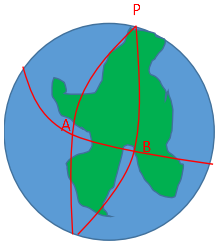
Los tensores son especialmente necesarios para describir los últimos dos fenómenos.

8.5.1 Suma de ángulos de un triángulo:

Elegimos como referencia un triángulo geodésico de puntos PAB sobre una superficie esférica:

P→θ=0 (Polo Norte) A→θ=π/2, φ=0 (Ecuador) B→θ= π/2, φ=Δφ (Ecuador)

Los meridianos PA y PB son curvas geodésicas, como todos los meridianos (son *círculos máximos*).
Los paralelos no son normalmente geodésicos, pero el AB sí lo es porque está ubicado en el Ecuador.



Los ángulos se miden en el plano tangente local a cada punto: $\hat{A}=\pi/2$ $\hat{B}=\pi/2$ $\hat{P}=\Delta\varphi$

Es un triángulo "bi-rectángulo", la suma de ángulos no da π (180°) como en las gometrías euclideanas.
El apartamiento de la propiedad euclídea es $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} - \pi = \Delta\varphi$

Si estuviéramos en el planeta Tierra, la figura sugiere que la irregularidad no-euclídea solo es medible en experimentos de escala interurbana o continental (cientos o miles de km^2), sería indetectable a escala doméstica (m^2) donde la superficie terrestre parece plana. Lo que marca la diferencia es la relación de las distancias involucradas respecto al radio de curvatura, o la magnitud del área dedicada a los experimentos.
En nuestro experimento, las áreas asociadas a la superficie esférica son:

- área total = $4.\pi.r^2$
- hemisferio norte = $2.\pi.r^2$
- triángulo que ocupa Δφ en vez de 2π → $\Delta\varphi.r^2$

La desviación angular por unidad de área tiene valor $1/r^2$ y pone de manifiesto el radio de curvatura R_c=r de la superficie.
→Para curvas: curvatura es desviación angular por unidad de distancia recorrida, valor=$1/R_c$.
→Para superficies: curvatura es desviación angular por unidad de área, valor=$1/R_c^2$.

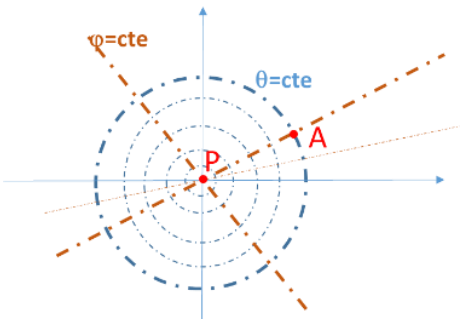
Este experimento proporciona una medida de la curvatura media en la región encerrada por el triángulo.
En el caso de la esfera no es relevante el tamaño del triángulo porque la curvatura es uniforme. En superficies de curvatura variable podemos extender esta definición para calcular la curvatura en un punto, repitiendo el cálculo de los triángulos en áreas relativamente pequeñas que encierren al punto de análisis.

8.5.2 Longitud de una circunferencia:

Consideramos un casquete esférico de dimensión-2 "S^2" embebido en $|R^3$.
Dibujamos un trozo de "carta polar" donde se ven líneas marcadas con distinto color:

marrón→ meridianos φ=cte azul→ paralelos θ=cte.

Deben ser valores chicos de θ por ejemplo θ=1°, θ=2°, θ=3° … etc,
θ no puede crecer mucho porque entonces la aproximación local por plano tangente pierde eficacia.



Identificamos un punto 'A' en la vecindad del polo 'P'.
¿Cuál es la distancia AP? Según nuestra métrica, es el resultado de la integral de línea ∫dS desde P hacia A.
$dS=\sqrt{R_c^2.d\theta^2 + R_c^2.sen^2\theta.d\varphi^2}$ (métrica del casquete esférico de radio R_c)
Como la integral depende del camino, definimos AP como la mínima distancia posible.
La cual se obtiene de elegir un trayecto geodésico, en este caso un meridiano φ=cte.

$dS=R_c.d\theta$ para el trayecto que nos interesa donde $d\varphi=0$.
→$AP=R_c.\theta_o$, siendo θ_o la coordenada del punto A.

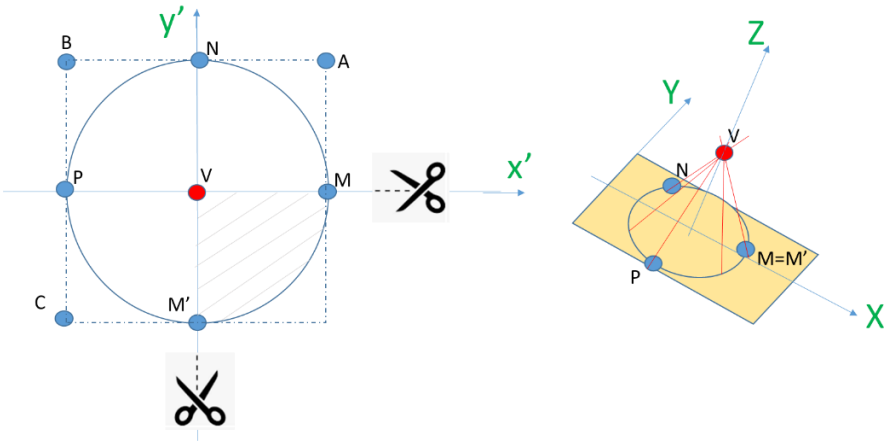
A continuación consideramos otros puntos que cumplen la propiedad de que su distancia a 'P' es el mismo valor AP. Esos puntos están distribuidos a lo largo del paralelo $\theta=\theta_o$ cte y forman el lugar geométrico que llamamos *circunferencia*.

Finalmente calculamos la longitud de dicha circunferencia como la integral de línea ∫dS, ahora con $dS=R_c.sen(\theta_o).d\varphi$ a lo largo de la línea curva $\theta=\theta_o$ cte y $d\theta=0$; φ recorriendo desde 0 a 2π.
El resultado es $L=2\pi.R_c.sen(\theta_o)$ →El cociente longitud/radio es $L/AP=2.\pi.sen(\theta_o)/\theta_o$.
Para apartamientos chicos $sen\theta_o \approx \theta_o - \theta_o^3/6$ → $L/AP \approx 2\pi(1 - \theta_o^2/6)$.

La longitud de la circunferencia no es $(2\pi)_x$ (radio)
Y la desviación se hace cada vez más notoria cuando la circunferencia encierra más área y nos obliga a alejarnos del punto en el que hicimos la aproximación plana.
Tal como encontramos en secciones anteriores (7.3.1), las desviaciones de la métrica euclídea crecen cuadráticamente con los apartamientos; a las desviaciones se les puede tomar la derivada segunda respecto a los apartamientos, y eso da información sobre la curvatura (proporcional a $1/R_c^2$).

Geometría del cono:
La métrica en coordenadas esféricas se expresa como $(dS)^2=(dr)^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sen^2\theta.d\varphi^2$
Si nos restringimos a una superficie cónica θ=cte dθ=0, la métrica queda $(dS)^2=(dr)^2 + r^2.sen^2\theta.d\varphi^2$
Mediante un cambio de variables $\alpha=\varphi.sen\theta$ la métrica se convierte en Euclideana $(dS)^2=(dr)^2 + r^2.d\alpha^2$
En un plano auxiliar $x'=r.cos\alpha$ $y'=r.sen\alpha$ podemos dibujar triángulos que no envuelvan al vértice. Al transportarlos al cono se conserva la propiedad euclídea de que la suma de ángulos es igual a 180°.
De igual manera podemos dibujar circunferencias que no envuelvan al vértice, y al transportarlas al cono cumplirán la propiedad euclídea de Cfa=2π.radio. Esto es así porque el cono se puede envolver con una hoja de papel sin arrugar ni deformar, conserva sus propiedades de "métrica plana".

¿En qué consiste el transporte del plano auxiliar (x',y') hacia el cono?
Pensemos en el caso particular en que $sen\theta=3/4$. El cambio de variables $\alpha=\varphi.sen\theta$ resulta $\alpha=3/4.\varphi$
Cuando φ da una vuelta entera (φ=2π), el ángulo α dio solo ¾ de vuelta (α=3/2.π). Sin embargo llegamos a la semirrecta α=3/2.π que al transportar al cono se convierte en la misma generatriz que α=0.
Es como que desapareciera un cuadrante del plano. Proponemos como "juego" representar el plano auxiliar (x',y') en una hoja de papel, recortar o plegar el último cuadrante tal que se superponga la recta VM(α=0°) con la recta VM'(α=270°), y luego darle forma cónica a la hoja plegada.



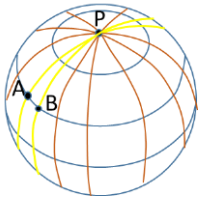
Ejercicio: Con ayuda del papel plegado y con argumentos matemáticos precisos, intentar demostrar que los triángulos y círculos que envuelven al vértice no cumplen las propiedades euclideanas.
Lo que ocurre es que toda la curvatura del cono está concentrada en su punto anguloso [Kurv(r)=∞ en r=0] manteniéndose nula en todo el resto de la superficie [Kurv(r)=0 para r≠0].

Ejercicio: Utilizar las propiedades de la función δ Dirac para demostrar Kurv(x',y')=Δα.δ(x',y').
Δα=2π–2π.senθ, se llama "déficit" o "defecto" angular del cono, es lo que plegamos o cortamos del papel, es el ángulo que le falta para completar la vuelta entera. Δα=π/2 en el ejemplo en que cortamos un cuadrante con senθ=3/4. *Pista: valor medio <Kurv> = 1/Area.∫∫Kurv(x',y').dx'.dy'*.
Sugerimos consultar algún material sobre Geometría Diferencial que trate sobre superficies cónicas.

8.5.3 Deriva geodésica geométrica:

En la Geometría Euclídea, el llamado "Quinto Postulado de Euclides" afirma (en uno de sus posibles enunciados) que la paralela a una recta por un punto exterior es única. Y está relacionado al hecho de que dos rectas paralelas nunca se cortan entre sí, mantienen constante su distancia y cortan con igual ángulo a una tercera recta. Los escenarios donde esto no se cumple se llaman "Geometrías No Euclideanas".

En la misma esfera de nuestros ejemplos calcularemos cómo evoluciona la separación entre dos geodésicas paralelas que pasan por dos puntos vecinos 'A' y 'B' respectivamente.



s = es el parámetro de longitud de arco
$\delta(s)=R_c.\text{sen}[\theta(s)].\Delta\varphi$ es la distancia métrica entre A,B
O sea, la distancia calculada integrando los diferenciales de coordenadas multiplicados por los coeficientes adecuados del tensor métrico. *Advertencia: Esto es válido solo en el entorno inmediato que nos interesa, $\theta\approx\pi/2$, y para $\Delta\varphi$ muy chico. Al alejarnos del Ecuador la distancia mínima no se mide sobre los paralelos*.

Tanto PA como PB tienen una trayectoria parametrizada como $\theta(s)=\pi/2-s/R_c$.
Ambas curvas alcanzan el polo θ=0 luego de un arco $s=R_c.\pi/2$ (lejos de nuestra región de estudio)

La velocidad paramétrica es $d\theta/ds=\theta'(s)=-1/R_c$
¿Cómo evoluciona la distancia entre los puntos A,B al recorrer las geodésicas?

$\delta(s)=R_c.\text{sen}[\theta(s)].\Delta\varphi$ →derivamos d/ds
$\delta'(s)=d\delta(s)/ds=R_c.\cos[\theta(s)].\theta'(s).\Delta\varphi$ →sustituimos
$\delta'(s)=R_c.\cos[\theta(s)].(-1/R_c).\Delta\varphi$

$\delta'(s) = -\cos[\theta(s)].\Delta\varphi$ → otra vez derivamos d/ds

$\delta''(s) = d^2\delta(s)/ds^2 = \text{sen}[\theta(s)].\ \theta'(s).\Delta\varphi$ → sustituimos otra vez

$\delta''(s) = \text{sen}[\theta(s)].\ (-1/R_c).\Delta\varphi$

Evaluamos en un pequeño entorno de $s\approx 0$ donde $\theta\approx\pi/2$, $\text{sen}\theta\approx 1$

$\delta''(0) = -\Delta\varphi/R_c$ → dividimos por $\delta(0)$, la separación al inicio

$\delta''(0)/\delta(0) = -\Delta\varphi/R_c/\delta(0)$ → sustituimos $\delta(0) = \Delta\varphi.R_c$

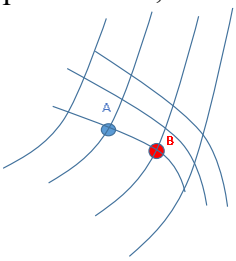
$\delta''(0)/\delta(0) = -\Delta\varphi/R_c/(\Delta\varphi.R_c)$

$$\delta''(s)/\delta(0)|_{s=0} = -1/R_c^2$$

He aquí otra propiedad que depende de la curvatura local de la superficie.

8.5.4 Deriva geodésica gravitatoria:

Pasamos a extender estos conceptos geométricos hacia un espacio físico con gravedad, que es el objeto de este trabajo. Continuamos la sección 7.3.2 donde analizábamos caídas libres iniciadas desde puntos próximos A,B en un campo gravitatorio de intensidad no uniforme y dirección radial.



Ahora generalizamos los resultados a otros campos gravitatorios arbitrarios, no necesariamente radiales, aunque conservando el requerimiento de que sean campos débiles.

Partiendo del reposo, los puntos A y B evolucionan en un entorno de valores chicos de 'τ' como:

$\vec{A}(\tau) \approx \vec{A_o} + \tfrac{1}{2}.\vec{g}(\vec{A_o}).\ \tau^2$ $\qquad$ $\vec{B}(\tau) \approx \vec{B_o} + \tfrac{1}{2}.\vec{g}(\vec{B_o}).\ \tau^2$

La hipótesis de campos débiles nos permite despreocuparnos de la distinción entre tiempo coordenado y tiempo propio; es decir, estudiamos $\vec{A}(\tau)$ pero también llegaríamos al mismo resultado con $\vec{A}(t)$.

Por otro lado, la hipótesis de proximidad entre A y B implica que los vectores de aceleración gravitatoria $\vec{g}$ difieren poco y es viable una aproximación local de primer orden.

Si expresamos $\vec{B_o}=\vec{A_o}+\vec{s}$, para $|\vec{s}|$ chico podemos estimar:

$$\vec{g}(\vec{B_o}) \approx \vec{g}(\vec{A_o}) + \vec{s}\cdot\nabla\,\vec{g}$$

El apartamiento queda:

$\vec{\delta}(\tau) = \vec{B}(\tau) - \vec{A}(\tau) \approx \vec{s} + \tfrac{1}{2}.\ \vec{s}\cdot\nabla\,\vec{g}\ .\tau^2$

La derivada temporal segunda del apartamiento resulta:

$$d^2\vec{\delta}/d\tau^2 \approx \vec{s}\cdot\nabla\,\vec{g}$$

Curiosidad: Observamos que aparece el gradiente de un vector $\nabla\vec{g}$ como fue presentado en 8.4.5

Expresamos el resultado anterior en coordenadas i=1,2,3

$\vec{s} = (dX^1, dX^2, dX^3)$

$\vec{s}\cdot\nabla = dX^j.\partial_j$

$\vec{g} = (g^1, g^2, g^3)$ → $d^2\delta^i/d\tau^2 \approx\ dX^j\ \partial_j\ g^i$

¿Qué son las componentes g^i del vector gravitatorio $\vec{g}$?

Desde el punto de vista clásico $\vec{g} = -\nabla\Phi_g$, lo que implica $g_i = -\partial_i\Phi_g$

Pero g_i son las componentes *covariantes* de $\vec{g}$, y lo que tenemos aquí son las $g^i = -\partial^i\Phi_g$, siendo $\partial^i = g^{ik}.\partial_k$

Para métricas levemente perturbadas y coordenadas cartesianas podemos considerar que los coeficientes son muy próximos a la unidad y que no afectan la descripción cualitativa del fenómeno que estamos estudiando en esta sección. De cualquier manera es conveniente respetar la notación de índices.

Llegamos entonces a la fórmula aproximada de desviación geodésica: $d^2\delta^i/d\tau^2 \approx -dX^j\, \partial_j\partial^i\Phi_g$

Que interpretamos de la siguiente manera:

- El "doble gradiente" $\partial_j\partial^i$ (dejando de lado por el momento la distinción entre derivada de índice alto ∂^i o índice bajo ∂_i) es el descriptor de gravedad no-uniforme→ o sea, de potencial Φ_g con derivadas segundas no nulas en alguna combinación de índices i,j.
  Y se asocia a efectos de deriva en dos geodésicas muy próximas, lo cual es un indicador de que estamos ubicados en una región con métrica perturbada respecto a la métrica euclídea.
- Por otro lado, el laplaciano $\nabla^2 = \partial_i\partial^i$ es una contracción del doble gradiente para i=j.
  Y se corresponde clásicamente con la presencia de masas en la región en donde estamos ubicados realizando los experimentos.
- Cuando se da el caso de que el laplaciano es nulo aunque el doble gradiente no sea nulo→ quiere decir que en algún lugar hay masas responsables de la perturbación, pero están ubicadas fuera de nuestra región de análisis.
- Por último: si fuera nula la desviación geodésica en todas las combinaciones de índices $\partial_j\partial^i\Phi=0\ \forall i,j$ →sospechamos (aunque todavía no podemos probarlo al 100%) que no hay masas ni *aquí* ni en ningún otro lado, y que estamos frente a un campo gravitatorio artificial.

Observación: *Contracción de un tensor implica igualar dos índices (por ejemplo j=i) y sumar en el índice repetido. Para que la contracción sea posible el índice repetido debería estar una vez arriba y otra vez abajo. No tendría sentido $\partial_i\partial_i$ como sí tiene sentido $\partial_i\partial^i$.*

Relación con los símbolos de Christoffel:

Suponemos que los puntos A,B del ejemplo anterior difieren solamente en su coordenada 'z', y nos proponemos calcular la evolución de su distancia $\Delta S_{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Al ser inicialmente $\Delta x=\Delta y=0$, vemos que estas distancias transversales constituyen infinitésimos de 2do orden que podemos descartar para un primer análisis aproximado. Lo que implica que solo nos interesa evaluar la deriva en la coordenada de separación 'z'. Según la ecuación geodésica, z(τ) evoluciona:

$$z^{\cdot\cdot}(\tau) = -\Gamma^z{}_{\alpha\beta}.U^\alpha U^\beta.$$

Cuando se parte del reposo la cuadrivelocidad tiene solo componente temporal, por lo que la suma implícita en αβ se reduce a un solo término α=0 β=0.

$z^{\cdot\cdot}(\tau) = -\Gamma^z{}_{00}.U^0U^0$ →$U^0=c\dot{t}$, aproximamos $\dot{t}\approx 1$ para velocidad baja y gravedad débil

$z^{\cdot\cdot}(\tau) \approx -c^2.\Gamma^z{}_{00}$

La deriva en la separación $\Delta S_{AB}(\tau)$ resulta:

$\Delta S_{AB}^{\cdot\cdot}(\tau)=z_A^{\cdot\cdot}(\tau)-z_B^{\cdot\cdot}(\tau)$

$\Delta S_{AB}^{\cdot\cdot}(\tau)\approx -c^2.[\Gamma^z{}_{00(A)}-\Gamma^z{}_{00(B)}]$ →aproximamos derivada por cociente incremental

$\Delta S_{AB}^{\cdot\cdot}(\tau) \approx -c^2.\Delta z.\ \partial_z\,[\Gamma^z{}_{00}]$ →dividimos por $\Delta S_{AB}(\tau=0)=\Delta z$

$$\Delta S_{AB}^{\cdot\cdot}(\tau)/\Delta S_{AB}(0)\big|_{\tau=0} \approx -c^2.\partial_z\Gamma^z{}_{00} \qquad (1)$$

La forma es muy similar a la de 8.5.3, lo que refuerza la identificación entre gravedad y geometría.

Referencial de caída libre:

Ahora repetimos lo anterior para un ambiente con métrica variable en el tiempo, nos inspiramos en el material presentado en el capítulo 7.3. $dS^2 \approx g_{00}(t).(c.dt)^2 + g_{xx}(t).dx^2 + g_{yy}(t).dy^2 + g_{zz}(t).dz^2$

Calculamos los Christoffel por el método del Lagrangeano visto en 8.3.1:

$$\mathcal{L}(\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{-g_{oo}(t).(\dot{t})^2 - 1/c^2[g_{xx}(t).\dot{x}^2+g_{yy}(t).\dot{y}^2+g_{zz}(t).\dot{z}^2]}$$

Momento-z: $P_z = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{z} = m_o.g_{zz}(t).\dot{z}$ $\quad\quad$ $\partial\mathcal{L}/\partial z = 0$

La ecuación de Euler-Lagrange da $dP_z/d\tau=0$

$g_{zz}(t).z^{\cdot\cdot} + \partial g_{zz}(t)/\partial t \,.\, t^{\cdot} z^{\cdot} = 0$

$z^{\cdot\cdot} + 1/\, g_{zz}(t).\, \partial g_{zz}(t)/\partial t \,.\, t^{\cdot} z^{\cdot} = 0$

$z^{\cdot\cdot} + 1/[c.g_{zz}(t)].\, \partial g_{zz}(t)/\partial t \,.\, ct^{\cdot} z^{\cdot} = 0$

$\rightarrow \Gamma^z{}_{0z} = \Gamma^z{}_{z0} = 1/[2c.g_{zz}(t)].\, \partial g_{zz}(t)/\partial t$

El factor ½ se explica porque la ecuación geodésica es una forma cuadrática expandida.

El término mixto $ct^{\cdot} z^{\cdot}$ tiene 2 contribuciones de igual valor: una por $\Gamma^z{}_{0z}$ y otra por $\Gamma^z{}_{z0}$

Ahora $\Delta z(t)$=constante, pero la distancia métrica ΔS_z varía porque está afectada por un coeficiente métrico.

$\Delta S_z(\tau)=\Delta z.\, \sqrt{g_{zz}(t)}$ $\quad\quad$ →derivamos una vez, asumiendo $t^{\cdot}\approx 1$

$\Delta S_z{}^{\cdot}(\tau)=\Delta z/(2.\sqrt{g_{zz}(t)}\,).\partial g_{zz}(t)/\partial t$

Si el referencial de caída libre está bien calibrado, las derivadas temporales de los coeficientes métricos deben ser nulas→ la información de deriva (=curvatura) está contenida en las derivadas segundas de la métrica (derivadas primeras de los Christoffel).

$\Delta S_z{}^{\cdot}(\tau)=\Delta z/(2.\sqrt{g_{zz}(t)}\,).\partial g_{zz}(t)/\partial t$ $\quad\quad$ →derivamos otra vez

$\Delta S_z{}^{\cdot\cdot}(\tau)=\Delta z/(2.\sqrt{g_{zz}(t)}\,).\partial^2 g_{zz}(t)/\partial t^2$ $\quad\quad$ →dividimos por la distancia métrica

$\Delta S_z{}^{\cdot\cdot}(\tau)/\Delta S_z\,(0)=1/[2.g_{zz}(t)].\partial^2 g_{zz}(t)/\partial t^2$ $\quad\quad$ →reconocemos derivada del Christoffel recién calculado

$\Delta S_z{}^{\cdot}(\tau)/\Delta S_z(0)=c.\partial_t \Gamma^z{}_{0z}$ $\quad\quad$ →escalamos factor 'c' porque coordenada $X^0=ct$

$\Delta S_z{}^{\cdot\cdot}(\tau)/\Delta S_z(0)=c^2.\partial_0 \Gamma^z{}_{0z}$

El resultado entonces es $\Delta S_z{}^{\cdot\cdot}(\tau)/\Delta S_z(0)\approx +c^2.\partial_0 \Gamma^z{}_{0z}$ $\quad\quad$ (2)

En un escenario genérico donde la métrica pueda variar tanto en el espacio como en el tiempo, podemos suponer que los efectos son aditivos y resultan de combinar los resultados parciales (1) y (2).

$$\Delta S_z{}^{\cdot\cdot}(\tau)/\Delta S_z(0)\approx c^2.[\partial_0 \Gamma^z{}_{0z} - \partial_z \Gamma^z{}_{00}\,]$$

Resultados similares se obtienen repitiendo el experimento para A,B separados en 'x' y en 'y'.

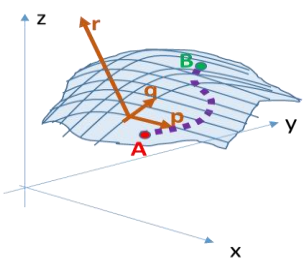
$\Delta S_y{}^{\cdot\cdot}(\tau)/\Delta S_y(0)\approx +c^2.[\partial_0 \Gamma^y{}_{0y} - \partial_y \Gamma^y{}_{00}\,]$ $\quad\quad$ $\Delta S_x{}^{\cdot\cdot}(\tau)/\Delta S_x(0)\approx +c^2.[\partial_0 \Gamma^x{}_{0x} - \partial_x \Gamma^x{}_{00}\,]$

Estas fórmulas contienen restas de términos simétricos 0-x, 0-y, 0-z con inversión de roles, y recuerdan a la forma en que fue definido el tensor de campo electromagnético en el capítulo 5: $\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$

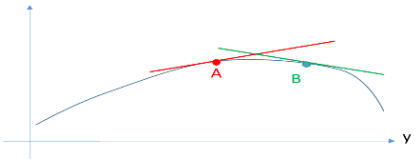
Veremos en el próximo capítulo que estas restas de términos forman parte de coeficientes del tensor de curvatura, y que son los aportes dominantes en escenarios de gravedades débiles.

8.5.5 Transporte paralelo:

En geometrías curvas como nuestro mundo (una variedad 4D embebida en un hipotético espacio de dimensión 5 o mayor) es difícil definir si un vector $\vec{V}(A)$ ubicado en el punto 'A' es o no paralelo a otro $\vec{V}(B)$ ubicado en el punto 'B'. Una comparación directa no tendría sentido porque estaríamos comparando objetos que pertenecen a diferentes espacios vectoriales, cada uno se obtiene por combinación lineal de los vectores de su respectiva base local $\{\vec{E_\alpha}\}$.



Hagamos una proyección plana de la figura anterior para ver mejor este efecto, por ejemplo en un plano yz:

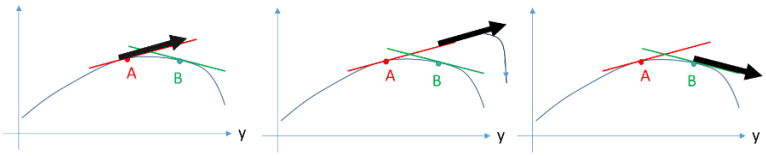


- Todos los vectores posibles que se puedan formar en el punto 'A' con la base local están contenidos en el plano tangente que se proyecta con color rojo en la figura. *$\vec{V}(B)$ no es expresable en esta base*.
- A su vez, todos los vectores que se pueden formar en el punto 'B' con la base local pertenecen al plano tangente verde. *$\vec{V}(A)$ no es expresable en esta base*.

Es necesaria una conexión para establecer ecuaciones globales que trasciendan las aproximaciones locales por plano tangente y permitan "conectar" la región 'A' con la región 'B'. A los símbolos de Christoffel se los conoce en algunos contextos como proveedores de conexión, y a la conexión provista por esta herramienta matemática se le da el nombre de conexión de Levi-Civita.

El concepto de paralelismo se puede extender a superficies curvas de acuerdo con este enunciado:
Dos vectores en ubicaciones diferentes A,B se dicen "paralelos" si uno es el resultado de aplicarle al otro un procedimiento especial llamado "transporte paralelo".
Para cubrirnos frente a la posibilidad de que el transporte paralelo pueda depender del recorrido A→B, (anticipamos que así ocurre, en efecto) elegimos para la definición anterior un trayecto que no ofrezca ambigüedad: un camino geodésico.
En el triángulo geodésico de la sección 8.5.3, el arco PB (en la vecindad del punto B) es paralelo al arco PA (en la vecindad del punto A). Ambos arcos son perpendiculares al Ecuador.
En las geometrías euclideanas dos líneas inicialmente paralelas siempre se mantienen paralelas. En estas geometrías no-euclideanas puede ocurrir que dos paralelas se acerquen y se encuentren luego de transcurrida cierta distancia, como es el caso de los arcos PA y PB que convergen en el Polo Norte P.
Es una manifestación del fenómeno de deriva geodésica, estudiado en la sección anterior.

¿De qué se trata este transporte paralelo?
Supongamos un vector $\vec{V}$ ubicado en la posición 'A' y expresable como combinación lineal de los vectores base locales $\vec{V}(A)=V^{\beta}(A).\vec{E_{\beta}}(A)$. Lo que significa que está contenido en el plano tangente (πA) dibujado en rojo en la figura simplificada.
Sobre ese plano (πA) realizamos un primer transporte paralelo hasta quedar "arriba" del punto 'B', utilizando las reglas conocidas de la geometría plana, que informalmente se describen como "*mantener la flecha apuntando siempre en la misma dirección*".



Debido a la curvatura de la superficie, este vector $\vec{V}(A)$ adquiere componentes normales al plano tangente de la nueva ubicación (πB). Si queremos quitar esas componentes y quedarnos solo con la parte contenida en el plano verde (πB) $\vec{V}(B)= V^{\lambda}(B).\vec{E_{\lambda}}(B)$, debemos "*abatir*" el $\vec{V}$, es decir, proyectar sobre los vectores base de la nueva posición (*estrictamente: sobre los vectores duales, según 8.1.3*) y calcular sus componentes $V^{\lambda}(B)=<\vec{V}(A),\tilde{E}^{\lambda}(B)>$. *Por simplicidad usaremos a continuación el símbolo de producto escalar '·', pero debemos recordar que debe utilizarse la métrica local (cualquiera sea) en lugar de la cartesiana.*

$V^{\lambda}(B)=\vec{V}(A)\cdot\tilde{E}^{\lambda}(B)$ →sustituimos $\vec{V}(A)=V^{\beta}(A).\vec{E_{\beta}}(A)$
$V^{\lambda}(B)=V^{\beta}(A).\vec{E_{\beta}}(A)\cdot\tilde{E}^{\lambda}(B)$

Ahora conectamos el punto 'A' con su vecino cercano 'B', expresando el cambio en los vectores base mediante los coeficientes de Christoffel (coeficientes de la conexión): $\vec{E_{\beta}}(A)\approx\vec{E_{\beta}}(B)-dX^{\alpha}.\partial_{\alpha}\vec{E_{\beta}}$

$V^{\lambda}(B)=V^{\beta}(A).\vec{E_{\beta}}(A)\cdot\tilde{E}^{\lambda}(B)$
$V^{\lambda}(B)=V^{\beta}(A).[\vec{E_{\beta}}(B)-dX^{\alpha}.\partial_{\alpha}\vec{E_{\beta}}]\cdot\tilde{E}^{\lambda}(B)$ →expandimos
$V^{\lambda}(B)=V^{\beta}(A).\vec{E_{\beta}}(B)\cdot\tilde{E}^{\lambda}(B)-dX^{\alpha}.V^{\beta}(A).\partial_{\alpha}\vec{E_{\beta}}\cdot\tilde{E}^{\lambda}(B)$

$V^\lambda(B)=V^\beta(A).\delta Kron_\beta^\lambda - dX^\alpha.\ V^\beta(A).\partial_\alpha \vec{E_\beta}\cdot\tilde{E}^\lambda(B)$

$V^\lambda(B)=V^\lambda(A) - dX^\alpha.\ V^\beta(A).\partial_\alpha \vec{E_\beta}\cdot\tilde{E}^\lambda(B)$ →reconocemos un símbolo de Christoffel

$V^\lambda(B)=V^\lambda(A) - dX^\alpha.\ V^\beta(A).\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ →reordenamos

$V^\lambda(B) - V^\lambda(A) + dX^\alpha.\ V^\beta(A).\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}=0$ →hacemos aparecer la derivada coordenada

$dX^\alpha\partial_\alpha V^\lambda + dX^\alpha.\ V^\beta(A).\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}=0$ →factor común

$dX^\alpha(\partial_\alpha V^\lambda + V^\beta(A).\Gamma^\lambda_{\alpha\beta})=0$ →reconocemos la derivada covariante de 8.2

$dX^\alpha\nabla_\alpha V^\lambda=0$

Extendemos este razonamiento infinitesimal hacia una escala mayor y enunciamos: Un vector $\vec{V}$ se transporta paralelamente a lo largo de una curva si su derivada covariante es nula en todo el trayecto.

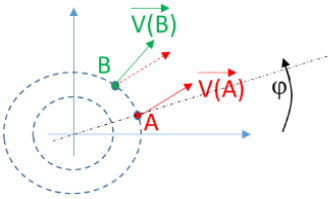
Transporte paralelo y derivada covariante:

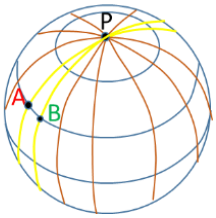
Supongamos que hay definido un campo vectorial $\vec{V}$ en cada punto del plano: $\vec{V}(A)$ y $\vec{V}(B)$.

Describimos todo en coordenadas cilíndricas (r,φ), tal que B y A comparten 'r' y difieren solo en 'φ'.

¿Qué significa la derivada parcial $\partial\vec{V}/\partial\varphi$ en el punto A? $\lim_{\Delta\varphi\to 0}[\vec{V}(r,\varphi+\Delta\varphi) - \vec{V}(r,\varphi)] / \Delta\varphi$

Es el límite $[\vec{V}(B)-\vec{V}(A)]/\Delta\varphi$ cuando B se acerca a A por el arco r=cte,





Para calcular la diferencia $\vec{V}(B)-\vec{V}(A)$ debemos primero llevar ambos vectores a un mismo origen, por ejemplo B, y luego restar. Estrictamente lo que estamos calculando es la diferencia entre el vector verde de la figura $\vec{V}(B)$ y el rojo punteado resultado de transportar $\vec{V}$(desde A→hacia B).

El transporte en el plano es trivial, pero requiere más atención si A y B son puntos de una superficie esférica, que comparten la coordenada θ y diferen solo en la coordenada φ.

La derivada que tiene sentido para un "*habitante*" de la superficie esférica no es $\partial_\varphi\vec{V}$.

Primero hay que transportar $\vec{V}$(A→B) para que tenga solo componentes en el plano tangente πB, antes de restar. O bien hacemos primero la diferencia y luego proyectamos con los vectores base de B para obtener las componentes. En ambos casos obtenemos la derivada covariante $\nabla_\varphi\vec{V}$, que es la que tiene más sentido físico para los habitantes de la superficie curva.

Ejercicio: Demostrar que el vector tangente a una curva (la "velocidad") se transporta paralelamente a lo largo de las geodésicas. Esto nos sirve de referencia para guiarnos →el transporte paralelo de otros vectores es tal que se mantiene el ángulo que forman con el vector tangente a la geodésica.

En la sección 8.3.2 vimos las siguientes propiedades de las esferas:

$\vec{E_\theta} = [r.\cos\theta.\cos\varphi,\quad r.\cos\theta.\sen\varphi,\quad -r.\sen\theta]$

$\partial_\theta\vec{E_\theta} = -\vec{E_r}$

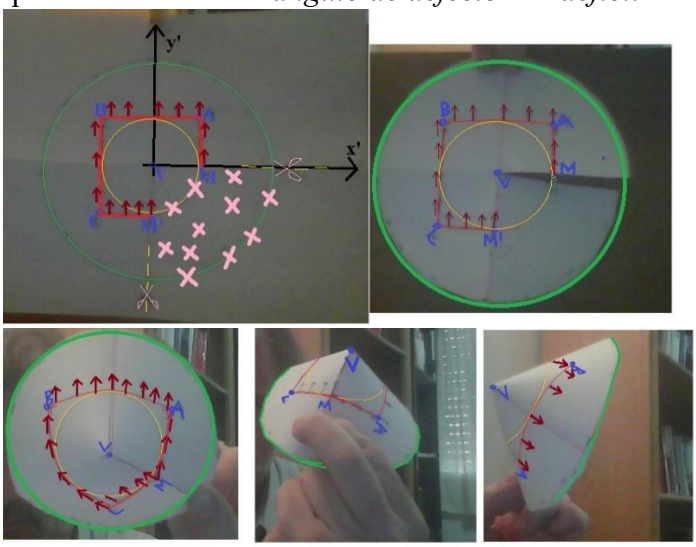
$\partial_\varphi\vec{E_\varphi} = [-r.\sen\theta.\cos\varphi,\ -r.\sen\theta.\sen\varphi,\ 0]$

La primera ecuación está diciendo que $\vec{E_\theta}$ varía a lo largo de un meridiano, lo cual es esperable porque debe acompañar la curvatura de la esfera. Sin embargo esa variación es centrípeta, apunta hacia el centro de la esfera →no proyecta sobre ninguno de nuestros vectores base superficiales $\vec{E_\theta}$ y $\vec{E_\varphi}$ y por lo tanto es nula su derivada covariante a lo largo del trayecto. Eso repercute en que las curvas con φ=cte y variaciones únicamente en 'θ' son geodésicas sobre la cáscara esférica.

La segunda ecuación muestra que al movernos a lo largo de un paralelo, la variación de $\vec{E_\varphi}$ tiene proyección sobre la dirección 'θ': dicha proyección es proporcional a senθ.cosθ. Eso explica que los paralelos no son geodésicos salvo en el caso particular del Ecuador θ=π/2.

Veremos que la curvatura local de una superficie puede medirse en función de la desviación angular por unidad de área que experimenta un vector al realizar un transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada.

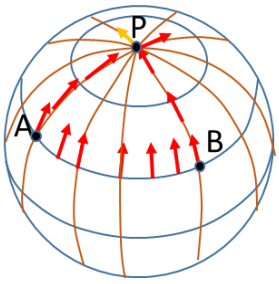
Ejercicio: En una superficie cónica, transportar paralelamente un vector alrededor de una curva que envuelva al vértice puntiagudo.
Con ayuda de la hoja plegada (M→M') sugerida en la sección 8.5.2, calcular el ángulo de giro y confirmar que coincide con el "*ángulo de defecto*" o "*déficit*" Δα.



Actividad sugerida: Conseguir una pelota de fútbol basada en hexágonos y pentágonos, o tratar de construir una recortando cartones, para visualizar los temas que estamos mencionando.

La curvatura está concentrada en los puntos angulosos. Si nos mantenemos dentro de un sector plano (hexágono o pentágono) o entre dos sectores vecinos, no observamos ninguno de los efectos típicos de la curvatura: afectación en la longitud de circunferencias o en la suma de ángulos, giro en un transporte paralelo... Para observar estos fenómenos debemos envolver a uno o más puntos angulosos.

En la esfera de la sección 8.5.1 podemos utilizar como triángulo de referencia el PAB:
Comenzamos en el Ecuador, punto 'A', y transportamos el vector rojo hacia el polo 'P' por el camino corto (meridiano). Por otro lado, realizamos un transporte por el camino largo, pasando primero por 'B' y luego llegando al polo 'P'. El vector de llegada se muestra anaranjado, queda girado respecto al original con la misma desviación angular Δφ.



Una repercusión de este fenómeno es la siguiente: en un pequeño cuadrilátero de dimensiones [dφ dθ], transportar primero en 'θ' y luego en 'φ' no es lo mismo que transportar primero en 'φ' y luego en 'θ', y ese efecto se manifiesta incluso en desplazamientos infinitesimales dφ,dθ.
En un caso la variación está asociada a $\nabla_{\varphi\theta}$ y en el otro caso a $\nabla_{\theta\varphi}$.
Encontramos que las derivadas covariantes no conmutan, $\nabla_\theta\nabla_\varphi \neq \nabla_\varphi\nabla_\theta$.
En esta propiedad se basan las definiciones de los tensores de curvatura de Riemann y Ricci.

9. FÍSICA EN ESPACIOS CURVOS.

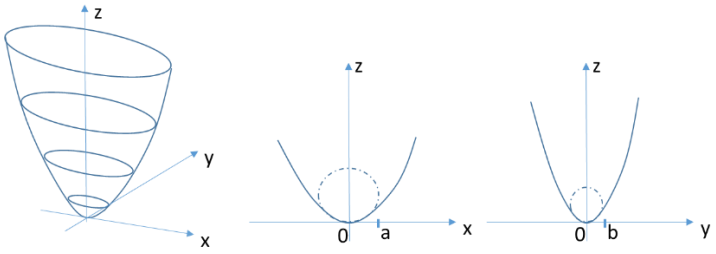
Iniciaremos este capítulo presentando los tensores de curvatura de Riemann y Ricci, y aplicando a situaciones físicas concretas algunos de los conceptos geométricos recién expuestos.
Luego intentaremos repetir la estrategia de los capítulos 2 a 4, cuando nos valíamos del Electromagnetismo como guía para introducirnos en los fenómenos de la Relatividad Especial. Comprobaremos que la teoría electromagnética también nos va a servir como referencia sobre la forma en que se modifican las leyes físicas al movernos en un espacio-tiempo *levemente curvo*, afectado por *campos débiles*.
Debido a la complejidad matemática no vamos a poder (todavía) formular generalizaciones para campos gravitatorios arbitrariamente altos. Pero al menos veremos una línea de razonamientos que luego podrá continuarse con éxito para conducirnos a las ecuaciones de campo de Einstein, es decir, a las ecuaciones relativistas de la Gravitación.

9.1 Tensores de curvatura.

Para acercarnos mejor a la idea del carácter tensorial de la curvatura, nos conviene estudiar geometrías más avanzadas que la esfera. Elegimos como ejemplo de estudio al paraboloide elíptico, que no representa un aumento excesivo de complejidad y que ofrece variantes interesantes como una curvatura que depende de la dirección y del punto de observación.

9.1.1 Paraboloide elíptico:

Se trata de una superficie con 2 radios principales 'a' y 'b' en su vértice, y ecuación $z=x^2/(2.a)+y^2/(2.b)$.



Los cortes con planos y=0 o x=0 ponen en evidencia los 2 radios de curvatura diferentes 'a', 'b':
En el vértice la curvatura es máxima y varía según el plano con el que hagamos los cortes.
Al alejarnos del vértice la curvatura disminuye porque las paredes de la superficie se *verticalizan*.

Un punto genérico $\vec{S} = (x, \quad y, \quad z)$ se parametriza según:

$x = u$ $\qquad$ $y = v$ $\qquad$ $z = u^2/(2.a) + v^2/(2.b)$

Los vectores base son:

$\vec{E_u} = \partial_u \vec{S} = (1, 0, u/a)$ $\qquad$ $\vec{E_v} = \partial_v \vec{S} = (0, 1, v/b)$

La matriz de vectores base es $J_\alpha[i] = E_\alpha[i] = \partial_\alpha S[i]$ (sería el jacobiano traspuesto)

α \ i	1	2	3
u	1	0	u/a
v	0	1	v/b

La métrica es $g_{\alpha\beta} = \vec{E_\alpha} \cdot \vec{E_\beta}$

i \ β	u	v
1	1	0
2	0	1
3	u/a	v/b

α \ i	1	2	3
u	1	0	u/a
v	0	1	v/b

$1+u^2/a^2$	uv/ab
uv/ab	$1+v^2/b^2$

Se puede ver como el producto de la matriz de vectores base con su traspuesta $g_{\alpha\beta} = J_\alpha[i].J[i]_\beta$
El determinante del tensor métrico es $g=\det(g_{\alpha\beta}) = 1+ u^2/a^2 +v^2/b^2$

La inversión de esta matriz da el tensor métrico dual $g^{\alpha\beta}$.
$g^{uu}=Adj(g_{uu})/g$ $g^{uv}=Adj(g_{vu})/g$
$g^{vu}=Adj(g_{uv})/g$ $g^{vv}=Adj(g_{vv})/g$
$g^{\alpha\beta} = 1/g.$

α\β |	u	v
u |	[1+v²/b²	-uv/ab]
v |	[-uv/ab	1+u²/a²]

Los vectores de la base dual son: $\tilde{E}^\alpha = g^{\alpha\beta}.\vec{E_\beta}$

Expresamos matricialmente, cuidando el orden de los índices para saber cuándo trasponer las matrices:
$\tilde{E}^\alpha[i] = g^{\alpha\beta}.E\beta[i]$
$\tilde{E}^\alpha[i] = 1/g.$

α\i |	1	2	3
u |[	1+v²/b²	-uv/ab	u/a]
v |[	-uv/ab	1+u²/a²	v/b]

Ejercicio: demostrar que los productos escalares $\tilde{E}^\alpha$ fila con $\vec{E_\beta}$ columna dan la matriz identidad 2x2.

Símbolos de Christoffel: $\Gamma^\lambda_{\alpha u} = (\partial_\alpha \vec{E_u})\,\tilde{E}^\lambda$ $\Gamma^\lambda_{\alpha v} = (\partial_\alpha \vec{E_v})\,\tilde{E}^\lambda$

$[C_u]=\Gamma^\lambda_{\alpha u} = (\partial_\alpha E_u[i]).\tilde{E}[i]^\lambda$

				i \ λ	u	V
				1	1+v²/b²	-uv/ab
				2	-uv/ab	1+u²/a²
				3	u/a	v/b
α \ i	1	2	3	α \ λ		
u	0	0	1/a		u/a²	v/ab .
v	0	0	0		0 .	0 .

$[C_v]=\Gamma^\lambda_{\alpha v} = (\partial_\alpha E_v[i]).\tilde{E}[i]^\lambda$

				i \ λ	u	V
				1	1+v²/b²	-uv/ab
				2	-uv/ab	1+u²/a²
				3	u/a	v/b
α \ i	1	2	3	α \ λ		
u	0	0	0		0	0
v	0	0	1/b		u/ab	v/b²

Las matrices de Christoffel pueden ordenarse de muchas maneras. Ante la duda es conveniente etiquetar siempre las filas y las columnas, para saber si estamos trabajando con una forma o con su traspuesta.
En la sección próxima vamos a utilizar las matrices ordenadas al revés: λ=filas, α=columnas

λ \ α	u	V
u	u/a²	0
v	v/ab	0

←matriz $[C_u] = \Gamma^\lambda_{\alpha u}$

λ \ α	u	V
u	0	u/ab
v	0	v/b²

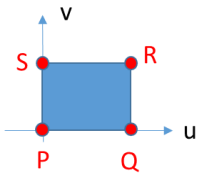
←matriz $[C_v] = \Gamma^\lambda_{\alpha v}$

Advertencia: Los símbolos de Christoffel están evaluados en el entorno u≈0 v≈0, por lo que el determinante vale g≈1 y lo omitimos porque aporta infinitésimos de orden superior al que nos interesa en este análisis.

9.1.2 Transporte paralelo en el vértice:

Consideramos un campo vectorial $\vec{A} = A^\lambda.\vec{E_\lambda}$ y lo transportamos paralelamente a lo largo de una trayectoria cerrada P→Q→R→S. Veremos que el vector de llegada queda girado respecto al de partida, es decir que el transporte anti-horario P→Q→R da un resultado diferente al transporte horario P→S→R.

En la figura se muestra un *pequeño* rectángulo con u∈[0,ΔU] y v∈[0,ΔV]



El concepto de *pequeño* es relativo a los radios de curvatura del paraboloide: u≪a, v≪b.

En los trayectos paralelos al eje 'u' tenemos $\nabla_u \vec{A} = 0$
En los trayectos paralelos al eje 'v' tenemos $\nabla_v \vec{A} = 0$
La fórmula de la derivada covariante en dirección 'u' es: $\nabla_u A^\lambda = \partial_u A^\lambda + \Gamma^\lambda_{u\alpha}.A^\alpha$
Aprovechando la simetría de los índices bajos de Christoffel, podemos intercambiarlos y re-escribir:

$$\nabla_u A^\lambda = \partial_u A^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha u}.A^\alpha$$

Esto está escrito en la forma exacta de un producto matricial de la matriz de Christoffel por las componentes de $[\vec{A}]$ en forma de vector columna. Llamamos $[C_u]=\Gamma^\lambda_{\alpha u}$.
$\nabla_u[\vec{A}] = \partial_u[\vec{A}] + [C_u].[\vec{A}]$

Transporte P→Q:
Viajamos en dirección 'u', nos concentramos en ∇_u que debe ser nulo.
Evaluamos la matriz [Cu] en P(0,0) y nos da idénticamente nula. Luego $\nabla_u \vec{A} = \partial_u \vec{A}$
Transporte paralelo implica derivada covariante nula, lo que en este segmento se traduce en que el vector no varía sus componentes.
$\vec{A}(Q) = \vec{A}(P)$
Transporte Q→R:
Viajamos en dirección 'v', importa ∇_v.
Evaluamos la matriz [Cv] en Q(ΔU,0) y ya no nos da nula:

```
[Cv]=
[      0      ΔU/ab ]
[      0      0     ]
```

Si $\vec{A} = \begin{bmatrix} A^u \\ A^v \end{bmatrix}$
tenemos que imponer condiciones a cada coordenada:

$\partial_v A^u + \Delta U/ab.A^v = 0$ → A^u varía en el trayecto
$\partial_v A^v = 0$ → A^v=cte en todo el trayecto

$\partial_v A^u = -\Delta U/ab.A^v$

Integrando las variaciones a lo largo de ese pequeño segmento, escribimos:

$$A^u(R) \approx A^u(Q) + \Delta V.\partial_v A^u$$
$$A^u(R) \approx A^u(Q) - \Delta V.\Delta U/ab.A^v$$

Siendo el vector resultante:
$\vec{A}(R) = \begin{bmatrix} A^u - \Delta V.\Delta U/ab.A^v \\ A^v \end{bmatrix}$

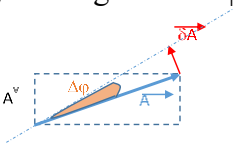
El transporte horario, primero por el trayecto P→S (∇_v) y luego por el trayecto S→R (∇_u) se calcula de la misma manera intercambiando los roles a←→b, u←→v. El resultado es:
$\vec{A}(R) = \begin{bmatrix} A^u \\ A^v - \Delta U.\Delta V/ba.A^u \end{bmatrix}$

La diferencia entre ambos caminos (horario y antihorario) es:

$\delta\vec{A} \approx$

$[-\Delta V.\Delta U/ab.A^v\ ]$
$[+\Delta V.\Delta U/ab.A^u\ ]$

Aprovechamos ahora varias propiedades métricas que surgen de evaluar puntos muy cercanos al u=0 v=0.
La métrica se reduce a nuestra euclídea conocida →en ella podemos calcular ángulos, perpendicularidades, áreas…etc de la manera acostumbrada.
$\delta\vec{A}$ es perpendicular a $\vec{A}$, igual que el vector de componentes (–2,3) es perpendicular a (300,200),
y su longitud vale $|\delta\vec{A}| = |\vec{A}|.\ \Delta V.\Delta U/ab$



En el triángulo rectángulo que se forma con cateto menor $=\delta\vec{A}$ y cateto mayor $=\vec{A}$, calculamos el ángulo de giro $\tan(\Delta\varphi) = |\delta\vec{A}|/|\vec{A}| = \Delta U.\Delta V/ab$
Para apartamientos leves $\Delta\varphi \ll 1$ y $\tan(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi$. $\Delta\varphi \approx \Delta U.\Delta V/ab$
El área es simplemente el producto de lados del rectángulo ΔU.ΔV, podemos dividir por esa área y nos queda GIRO POR UNIDAD DE ÁREA = 1/ab.
'a' y 'b' son los radios de curvatura del paraboloide:
plano xz, perfil $z=x^2/2a$ plano yz, perfil $z=y^2/2b$
La esfera es un caso particular en que $a=b=R_c$
→El giro por unidad de superficie es una cuantificación de la curvatura del paraboloide en el vértice, que es igual al producto de sus curvaturas principales o producto de los inversos de sus radios principales.

Curiosidad: El cilindro es una superficie con curvatura "falsa" o "aparente", al momento de cuantificarla con este criterio vemos que es nula porque una de sus direcciones (la axial) tiene curvatura nula o radio de curvatura infinito. Este hecho está asociado a la posibilidad de envolver un cilindro con una hoja de cuaderno sin deformación, cosa imposible con una esfera.
Ejercicio: Repetir los cálculos de la esfera 8.5.3, esta vez para evaluar la deriva geodésica en una pequeña región alrededor del vértice del paraboloide. Debe llegarse al resultado $\delta\ddot{}(s)/\delta(s)|_{\{s=0\}} = -1/R_c^2 = -1/(a.b)$

9.1.3 Tensor de Riemann:

El giro que obtuvimos al transportar vectores está directamente relacionado al hecho de que las derivadas covariantes de segundo orden no son conmutativas.
Vamos a extrapolar el resultado del paraboloide a superficies arbitrarias, que en cada punto pueden asimilarse a un "casquete" de paraboloide con sus 2 ejes principales de curvatura y sus respectivos radios.

Dada una dirección α, utilizamos para la derivada covariante la simplificación matricial obtenida en 9.1.2:
$\nabla_\alpha A^\lambda = \partial_\alpha A^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}.A^\mu$
$\nabla_\alpha[\vec{A}] = \partial_\alpha[\vec{A}] + [C_\alpha].[\vec{A}]$ Llamamos $\vec{B}$ a ese resultado
Luego aplicamos la derivada covariante en otra dirección β.

$\nabla_\beta[\vec{B}] = \partial_\beta\,[\vec{B}] + [C_\beta].[\vec{B}]$
$\nabla_\beta(\nabla_\alpha[\vec{A}]) = \partial_\beta\,(\partial_\alpha[\vec{A}] + [C_\alpha].[\vec{A}]) + [C_\beta].(\partial_\alpha[\vec{A}] + [C_\alpha].[\vec{A}])$
$\nabla_\beta(\nabla_\alpha[\vec{A}]) = \partial_\beta\partial_\alpha[\vec{A}] + \partial_\beta([C_\alpha].[\vec{A}]) + [C_\beta].(\partial_\alpha[\vec{A}]) + [C_\beta].[C_\alpha].[\vec{A}]$; derivada del producto
$\nabla_\beta(\nabla_\alpha[\vec{A}]) = \partial_\beta\partial_\alpha[\vec{A}] + (\partial_\beta[C_\alpha]).[\vec{A}] + [C_\alpha].(\partial_\beta[\vec{A}]) + [C_\beta].(\partial_\alpha[\vec{A}]) + [C_\beta].[C_\alpha].[\vec{A}]$
Ahora escribimos este resultado parcial junto con el que se obtiene invirtiendo los roles α y β.
Marcamos con igual color los términos que se cancelan al restar:
$\nabla_\beta(\nabla_\alpha[\vec{A}]) = \partial_\beta\partial_\alpha[\vec{A}] + (\partial_\beta[C_\alpha]).[\vec{A}] + [C_\alpha].(\partial_\beta[\vec{A}]) + [C_\beta].(\partial_\alpha[\vec{A}]) + [C_\beta].[C_\alpha].[\vec{A}]$
$\nabla_\alpha(\nabla_\beta[\vec{A}]) = \partial_\alpha\partial_\beta[\vec{A}] + (\partial_\alpha[C_\beta]).[\vec{A}] + [C_\beta].(\partial_\alpha[\vec{A}]) + [C_\alpha].(\partial_\beta[\vec{A}]) + [C_\alpha].[C_\beta].[\vec{A}]$
$\nabla_\alpha(\nabla_\beta[\vec{A}]) - \nabla_\beta(\nabla_\alpha[\vec{A}]) = \{\partial_\alpha[C_\beta] - \partial_\beta[C_\alpha] + [C_\alpha].[C_\beta] - [C_\beta].[C_\alpha]\}\,[\vec{A}]$

Para cada pareja de direcciones αβ, la no-conmutatividad de la derivada covariante segunda se cuantifica como una transformación lineal que opera con las componentes del vector [$\vec{A}$] y cuya matriz asociada es $M_{\alpha\beta}$.

α\β	u	v
u	[Muu	Muv]
v	[Mvu	Mvv]

A su vez, cada matriz '$M_{\alpha\beta}$' se describe mediante los índices antes nombrados: filas 'λ', columnas 'μ'.

λ\μ	u	v
u	---	---]
v	---	---]

Es como si tuviéramos una matriz de matrices, y se precisan 4 índices para su descripción:

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)A^\lambda = (\delta A)^\lambda{}_{\alpha\beta} = R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta}\,A^\mu$$

Se llama TENSOR DE RIEMANN a la entidad descrita por los componentes $R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta}$.

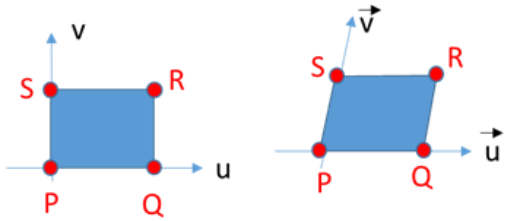
Para el paraboloide obtenemos el siguiente tensor de Riemann en el vértice (u=0,v=0):

α\β	u	v
u	[0 0]	[0 +1/ab]
	[0 0]	[-1/ab 0]
v	[0 -1/ab]	[0 0]
	[+1/ab 0]	[0 0]

9.1.4 Tensor de Riemann y transporte paralelo:

Vamos a calcular en forma genérica el transporte paralelo alrededor de una curva cerrada pequeña y ver que aparece el tensor de Riemann.

Advertencia: ¡Es un ejercicio trabajoso! Pero el resultado al que llegaremos es necesario para la deriva geodésica, que es el vínculo principal entre gravedad y curvatura.



Los vectores (chicos) los anotamos como $\vec{u} = dX^\alpha \vec{E_\alpha}$ $\vec{v} = dX^\beta \vec{E_\beta}$

Podemos pensarlos y visualizarlos inicialmente como si apuntaran según una pareja de vectores base α y β.

Si respetamos bien la notación tensorial, el convenio de la suma nos asegura que las expresiones serán luego extensibles a vectores de cualquier dirección.

El campo vectorial a transportar es $\vec{A}$, y los caminos de transporte son dos:

Antihorario: P→Q concatenado con Q→R

Horario: P→S concatenado con S→R

Ejecutamos cada segmento por orden.

Transporte P→Q:

Aquí $D\vec{A}/Ds=0$ en la dirección $\vec{u}$, eso se escribe como $dX^\alpha\nabla_\alpha A^\lambda=0$.

Expandimos según la fórmula de la derivada covariante:

$dX^\alpha\nabla_\alpha A^\lambda=0$

$dX^\alpha\partial_\alpha A^\lambda + dX^\alpha\,\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}A^\mu=0$

Integramos en el pequeño segmento P→Q.

El término gris es la integral de una derivada, que da la diferencia de la función entre puntos extremos del intervalo: $A^\lambda(Q)-A^\lambda(P)$.

A los efectos del término celeste, suponemos que a lo largo de todo el segmento tanto A^λ como el Christoffel $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}$ conservan aproximadamente su valor de arranque en el punto P. El resultado es $dX^\alpha\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)A^\mu(P)$.

$A^\lambda(Q)-A^\lambda(P) + dX^\alpha\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)A^\mu(P) = 0$

Para sacar factor común $A^\mu(P)$ utilizamos la propiedad de la delta de Kronecker.

$A^\lambda(Q) = A^\lambda(P) - dX^\alpha\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)A^\mu(P)$

$A^\lambda(Q) = \delta^\lambda{}_\mu A^\mu(P) - dX^\alpha\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)A^\mu(P)$

$A^\lambda(Q) = [\delta^\lambda{}_\mu - dX^\alpha\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)]A^\mu(P)$

Transporte Q→R:

En este otro segmento, la derivada direccional es según el vector $\vec{v}$.

$dX^\beta\nabla_\beta A^\rho = 0$ →expandimos

$dX^\beta\partial_\beta A^\rho + dX^\beta\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}A^\lambda = 0$

Integramos con el mismo criterio anterior, aproximando las componentes y el Christoffel por el valor de arranque al inicio del segmento, en el punto Q.

$A^\rho(R) - A^\rho(Q) + dX^\beta\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}(Q)A^\lambda(Q) = 0$ →δ Kronecker

$A^\rho(R) - \delta^\rho{}_\lambda A^\lambda(Q) + dX^\beta\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}(Q)A^\lambda(Q) = 0$ →factor común

$A^\rho(R) = [\delta^\rho{}_\lambda - dX^\beta\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}(Q)\,]\,A^\lambda(Q)$

Concatenamos los trayectos y expandimos los productos.

Antihorario P→Q→R:

$A^\rho(R) = [\delta^\rho{}_\lambda - dX^\beta\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}(Q)\,]\,[\delta^\lambda{}_\mu - dX^\alpha\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)]\,A^\mu(P)$

$A^\rho(R) = \{\,\delta^\rho{}_\mu - dX^\alpha\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(P) - dX^\beta\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(Q) + dX^\alpha dX^\beta\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}(Q)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)\,\}A^\mu(P)$

Transporte P→S:

Repetimos casi las mismas cuentas que con el segmento P→Q, solo que aquí el punto 'S' toma el rol de 'Q'. Y 'β' toma el rol de 'α', porque la derivada covariante es ahora en la otra dirección $\vec{v} = dX^\beta\vec{E_\beta}$.

$A^\lambda(S) = [\delta^\lambda{}_\mu - dX^\beta\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}(P)]A^\mu(P)$

Transporte S→R:

Repetimos los cálculos del segmento Q→R, con 'S' en lugar de 'Q'. Y con los roles α,β intercambiados.

$A^\rho(R) = [\delta^\rho{}_\lambda - dX^\alpha\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}(S)]A^\lambda(S)$

Concatenamos los trayectos y expandimos los productos.

Horario P→S→R:

$A^\rho(R) = [\delta^\rho{}_\lambda - dX^\alpha\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}(S)]\,.\,[\delta^\lambda{}_\mu - dX^\beta\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}(P)]A^\mu(P)$

$A^\rho(R) = [\,\delta^\rho{}_\mu - dX^\beta\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(P) - dX^\alpha\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(S) + dX^\beta dX^\alpha\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}(S)\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}(P)\,\}A^\mu(P)$

Calculamos la diferencia de transporte restando el celeste menos el verde:

$\delta A^\rho = \{\,dX^\alpha[-\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(P) + \Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(S)] + dX^\beta[-\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(Q) + \Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(P)] + dX^\alpha dX^\beta[\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}(Q)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P) - \Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}(S)\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}(P)]\}A^\mu(P)$

Aplicamos la hipótesis de "cercanía" entre los puntos P,Q,R,S para aproximar las diferencias de Christoffel en función de sus derivadas parciales.

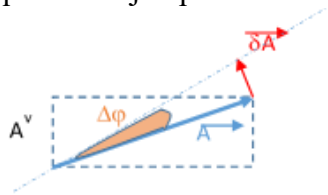
$$\delta A^\rho = \{\,\partial_\beta\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}] + \Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}\,\}\,dX^\alpha dX^\beta A^\mu$$

$$\delta A^\rho = -R^\rho{}_{\mu\alpha\beta}\,dX^\alpha dX^\beta A^\mu$$

Para cada pareja de variables (α,β), la variación $\delta\vec{A}$ se obtiene de aplicarle a los componentes de $\vec{A}$ una transformación lineal de matriz asociada $M^\rho{}_\mu$, filas ρ y columnas μ: $\delta A^\rho = M^\rho{}_\mu(\alpha,\beta)\,A^\mu$

→$M^\rho{}_\mu$ es adimensionado, δA/A. Si acaso tiene unidades, serían radianes como $d\phi = ds/R_c$ en una curva. ¿Tendrá sentido interpretar δA/A como un ángulo? Afirmamos que la respuesta es sí, porque el transporte paralelo conserva el módulo.

De acuerdo con lo expuesto en 8.5.5, la primera etapa del transporte paralelo se hacía en el plano tangente, lo que naturalmente conserva el módulo. La segunda etapa involucraba una proyección o abatimiento con una pequeña pérdida de módulo por factor cos(ϕ), siendo ϕ la variación angular del plano tangente. En el límite en que $\phi \to 0$, $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, la pérdida es un infinitésimo de segundo orden superior al que maneja la derivación (primer orden en ϕ). En la sección 9.4.2 lo demostraremos con más rigor utilizando una propiedad llamada "compatibilidad métrica". Mientras tanto aceptamos que la única variación permitida $\delta\vec{A}$ debe ser en dirección ortogonal a $\vec{A}$, porque si proyectara según $\vec{A}$ estaría alterando el módulo. Pasa igual que en el ejemplo del vértice del paraboloide, repetimos la figura:



$\to dX^\alpha . dX^\beta$ tiene unidades de área, si las coordenadas son longitudes

$\to M^\rho{}_\mu(\alpha,\beta) = dX^\alpha . dX^\beta . R^\rho{}_{\mu\alpha\beta}$

El Riemann mide variación angular por unidad de área, es decir, curvatura de superficie.

Observación:

Los dos primeros términos de $R^x{}_{0x0}$, $R^y{}_{0y0}$ y $R^z{}_{0z0}$ ya los habíamos anticipado en la sección 8.5.4

$R^z{}_{0z0} = \partial_z \Gamma^z{}_{00} - \partial_0 \Gamma^z{}_{0z} + \Gamma^z{}_{\sigma z}\,\Gamma^\sigma{}_{00} - \Gamma^z{}_{\sigma 0}\,\Gamma^\sigma{}_{0z}$

Resultan ser los términos dominantes en un referencial localmente inercial, donde los Christoffel son infinitésimos de primer orden y los productos de Christoffel resultan infinitésimos de segundo orden (menos significativos).

9.1.5 Tensor de Ricci:

El tamaño del tensor de Riemann crece considerablemente al aumentar las dimensiones de análisis:

→ 2^4=16 elementos en el paraboloide (u,v)

→ 3^4=81 elementos en coordenadas esféricas (r, θ, φ)

→4^4=256 elementos en Relatividad General con espacio-tiempo (ct, x, y, z)

El tensor de Ricci es una versión reducida y menos compleja del Riemann.

Se calcula contrayendo el tensor de Riemann en el índice contravariante λ con alguno de los covariantes α o β. Para recordar que un tensor deriva del otro por contracción, y gracias a la coincidencia de que ambos descubridores comienzan con 'R', se utiliza en general la misma letra para designar a este tensor:

$$R_{\mu\beta} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\beta}$$

Evidentemente se pierde información durante la contracción, al pasar de 16 componentes a solamente 4. O bajar de 81 a 9, o de 256 a 16.

Aunque no podemos demostrarlo a esta altura, simplemente mencionamos que la pérdida de información suele ser mínima o irrelevante en muchos de los casos prácticos que se relacionan con esta disciplina, al menos en las etapas iniciales de introducción.

En el ejemplo del paraboloide, los términos relevantes son:

$R_{uu}=R^{\lambda}{}_{u\lambda u} = R^{u}{}_{uuu} + R^{v}{}_{uvu} = 0 + 1/ab$

$R_{uv}=R^{\lambda}{}_{u\lambda v} = R^{u}{}_{uuv} + R^{v}{}_{uvv} = 0 + 0$

$R_{vu}=R^{\lambda}{}_{v\lambda u} = R^{u}{}_{vuu} + R^{v}{}_{vvu} = 0 + 0$

$R_{vv}=R^{\lambda}{}_{v\lambda v} = R^{u}{}_{vuv} + R^{v}{}_{vvv} = +1/ab + 0$

9.1.6 Escalar de Ricci:

Consiste en una nueva contracción, concretamente, la traza del tensor de Ricci.

$$\mathcal{R}=R_{\mu}{}^{\mu}=R^{\mu}{}_{\mu}$$

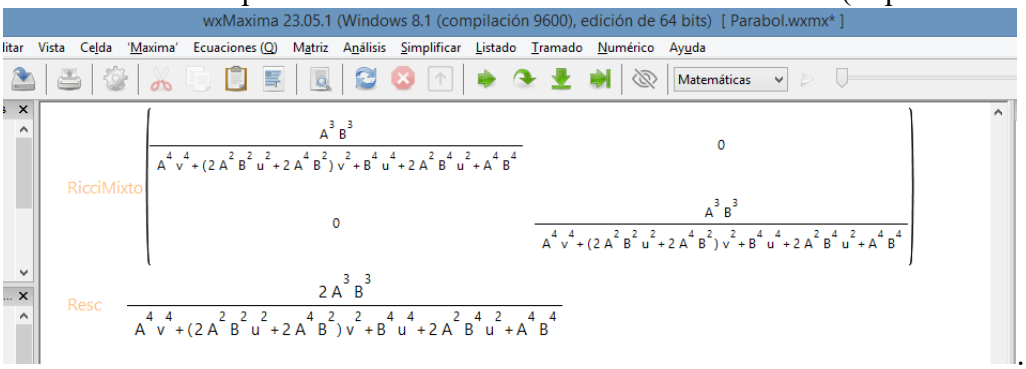
En el vértice del paraboloide tenemos $\mathcal{R} = R^{u}{}_{u} + R^{v}{}_{v} = 1/ab + 1/ab$ → $\mathcal{R} = 2/ab$

Este escalar $\mathcal{R}$ coincide, salvo un factor de escala, con la curvatura gaussiana o producto de las curvaturas principales 1/a * 1/b.

A medida que nos alejamos del vértice, las paredes del paraboloide se "verticalizan" y su aspecto se parece cada vez más a un cilindro (al menos localmente y en pequeñas regiones). Al ser nula la curvatura gaussiana de un cilindro, sería esperable que este fenómeno fuera bien cuantificado por los componentes del tensor de Riemann/Ricci y por el escalar de Ricci, que deberían tender a cero cuando u≫a, v≫b.

Se puede comprobar este detalle con ayuda de un programa que maneje Cálculo Simbólico, calculando los tensores en todo punto (u,v) y no solamente en el vértice u=0 v=0.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en Maxima (https://maxima.cesga.es).



Los radios de curvatura se definieron en mayúsculas 'A', 'B' para que se diferencien mejor de las coordenadas 'u','v'.

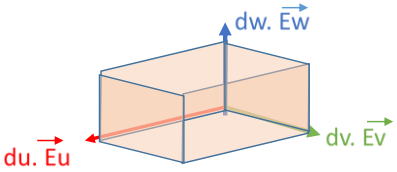
Otro recurso sugerido es:[https://christoffel-symbols-calculator.com] Christoffel Symbols Calculator .

9.2 Aplicaciones de Geometría Diferencial.

La Geometría Diferencial utiliza herramientas de Cálculo Diferencial, Cálculo Vectorial y Álgebra Lineal para evaluar longitudes, áreas y volúmenes sobre superficies curvas (y sus extensiones multidimensionales llamadas "variedades"). En este capítulo veremos solamente algunos detalles relacionados con los tensores de curvatura de Riemann/Ricci y su vinculación con la Gravitación.
Veremos también un escenario donde se calculan áreas y volúmenes en 2D y 3D, sin necesidad de pasar a más dimensiones. Llegaremos a una fórmula útil que relaciona la divergencia covariante y los símbolos de Christoffel presentados en el capítulo 8.3.

9.2.1 Divergencia genérica:

Tomamos como ejemplo un campo vectorial $\vec{J}$ y analizamos su flujo a través de un elemento de volumen formado por desplazamientos en 3 coordenadas u, v, w. Podemos pensar que se trata del vector densidad de corriente (unidades Amp/m^2) aunque los resultados serían extensibles a otros vectores.



El elemento infinitesimal de volumen consiste en un paralelepípedo con 3 lados $du.\vec{E_u}$, $dv.\vec{E_v}$, $dw.\vec{E_w}$, no necesariamente ortogonales. El valor del volumen es el producto de la altura por la superficie de la base.

- El producto vectorial $(du.\vec{E_u}) \wedge (dv.\vec{E_v})$ da un vector normal al área u,v y de módulo igual a la superficie de la base.
- La altura que cuenta para el volumen es la proyección del lado $dw.\vec{E_w}$ sobre el vector normal, es decir, el producto escalar $[(du.\vec{E_u}) \wedge (dv.\vec{E_v})] \cdot dw.\vec{E_w}$.

→Volumen

$dVol = (du.\vec{E_u} \wedge dv.\vec{E_v}) \cdot dw.\vec{E_w}$

$dVol = du.dv.dw.(\vec{E_u} \wedge \vec{E_v}) \cdot \vec{E_w}$

Reflexión: Esto tiene que ser un volumen invariante, independiente de la elección de coordenadas.
Cada vector individual es invariante, producto de un vector base (covariante) por un diferencial coordenado (contravariante). Ej: $du.\vec{E_u} = dX^u.\vec{E_u}$. El producto escalar también es invariante. La única duda puede surgir por el lado del producto vectorial, parece algo muy "clásico" que todavía nunca incorporamos a la Relatividad y a la notación tensorial.

El triple producto escalar-vectorial admite intercambio cíclico de roles, según cuál dirección elegimos como altura del paralelepípedo.

$(\vec{E_u} \wedge \vec{E_v}) \cdot \vec{E_w} = (\vec{E_v} \wedge \vec{E_w}) \cdot \vec{E_u} = (\vec{E_w} \wedge \vec{E_u}) \cdot \vec{E_v}$

En los cursos de Análisis y Álgebra se ve que ese producto triple se corresponde con el determinante de la matriz cuyas filas (o columnas) son las componentes cartesianas de cada vector.
Ejercicio: Invitamos a que haga la demostración quien no lo recuerde o no lo crea.

En este contexto físico, lo que tenemos es el determinante del jacobiano de la transformación que llevaría la base canónica x,y,z a la base genérica u,v,w:

α\i	1	2	3 .
u	Eu1	Eu2	Eu3]
v	Ev1	Ev2	Ev3]
w	Ew1	Ew2	Ew3]

Por otro lado, el tensor métrico es el producto del jacobiano por el traspuesto (sección 8.1.2)

$g_{\alpha\beta} = J_\alpha[i] \; . \; J[i]_\beta$

$[g] = [Jac^*].[Jac]$

$g = \det([g]) = \det([Jac^*]).\det([Jac]) = \det^2([Jac])$

Por lo tanto, el factor que aparece en el diferencial de volumen es $\det([Jac])=\sqrt{g}$

$$dVol= du.dv.dw.\sqrt{g}$$

El flujo de $\vec{J}$ en dirección-w surge de integrar $J^w.\vec{E_w}$ en una pequeña área transversal a esa dirección.

Flujo-w = $J^w.\vec{E_w}\cdot(du.\vec{E_u})\wedge(dv.\vec{E_v})$

Flujo-w = $du.dv.J^w.\vec{E_w}\cdot(\vec{E_u}\wedge\vec{E_v})$ →reconocemos el producto triple

Flujo-w = $du.dv.J^w.\sqrt{g}$

El flujo neto en una región limitada, en la dirección-w, consiste en restar lo que *sale* por 'w+dw' menos lo que *entra* por 'w'.

Flujo-neto-w = $du.dv.J^w(w+dw)\sqrt{g(w+dw)} - du.dv.J^w(w)\sqrt{g(w)}$

Flujo-neto-w = $du.dv.dw.\partial_w(J^w.\sqrt{g})$

El razonamiento es análogo para las otras 2 direcciones u,v. Y en cada caso vuelve a aparecer el mismo determinante debido a la permutación cíclica de los índices.

Flujo-neto = $du.dv.dw.\partial_u(J^u.\sqrt{g}) + du.dv.dw.\partial_v(J^v.\sqrt{g}) + du.dv.dw.\partial_w(J^w.\sqrt{g})$

Finalmente: La divergencia de un campo vectorial es el flujo-neto por unidad de volumen en el límite en que las dimensiones de ese volumen tienden a 0.

$\nabla\cdot\vec{J}$ = Flujo-neto/dVol →sustituimos

$\nabla\cdot\vec{J} = 1/\sqrt{g}\ .[\partial_u(J^u.\sqrt{g}) + \partial_v(J^v.\sqrt{g}) + \partial_w(J^w.\sqrt{g})]$

$$\nabla\cdot\vec{J} = 1/\sqrt{g}\ .\partial_\alpha(\sqrt{g}\ .J^\alpha)$$ (notación tensorial con suma implícita en α)

Podemos reexpresar lo anterior aplicando derivada del producto.

$\nabla\cdot\vec{J} = \partial_\alpha.J^\alpha + 1/\sqrt{g}\ .\partial_\alpha(\sqrt{g}\ ).J^\alpha$

El primer término (celeste) es la contribución de la derivada coordenada a la divergencia.
El segundo término (verde) es el agregado corrector basado en los símbolos de Christoffel y que convierte la derivada en covariante.

Comparamos esta fórmula con la obtenida en 8.2.3:

$\nabla_\alpha J^\lambda = \partial_\alpha J^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}.J^\beta$ →contracción λ=α

$\nabla_\alpha J^\alpha = \partial_\alpha J^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta}.J^\beta$

No se ve igual a lo que venimos desarrollando en esta sección, pero lo arreglamos advirtiendo que tanto α como β son índices "*dummy*" (colapsan al sumar) y se pueden intercambiar los roles, escribiendo:

$\nabla_\alpha J^\alpha = \partial_\alpha J^\alpha + \Gamma^\beta{}_{\beta\alpha}.J^\alpha$

Entonces la identificación es:

$$\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha} = \text{traza}([C_\alpha]) = 1/\sqrt{g}\ .\partial_\alpha(\sqrt{g}\ )$$

Ejercicio: Verificar lo anterior para el caso de tensor métrico diagonal con determinante $g=g_{uu}.g_{vv}.g_{ww}$

α\β	u	v	w	.
u	g_{uu}	0	0	]
v	0	g_{vv}	0	]
ω	0	0	g_{ww}	]

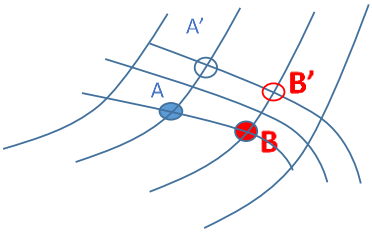
Guía de demostración: Partir de la definición dada en 8.2.5 y utilizar la simplificación de métrica diagonal para sustituir $g^{\beta\beta}=1/g_{\beta\beta}$.

9.2.2 Tensor de Riemann y deriva geodésica:

En la sección 8.5.4 aproximábamos la deriva geodésica para el límite de campo débil.
Aquí enunciamos (sin demostrar en forma rigurosa) el siguiente resultado que generaliza lo anterior:

$$D^2\delta^i/D\tau^2 = -R^i{}_{njk}\, U^n\, U^k\, dX^j.$$

Es una triple suma en las combinaciones de índices j, n, k
$\vec{\delta}$ es el vector de apartamiento de dos geodésicas próximas, δ^i son sus componentes contravariantes.
U^n son las componentes de la cuadrivelocidad con la que se recorren las geodésicas.
D/Dτ es la derivada *total* covariante que generaliza y sustituye a d/dτ.



Idea sobre cómo encarar la demostración exacta:

- El recorrido A→A' es geodésico con velocidad $\vec{U}$. Ese vector $\vec{U}$ se transporta paralelamente a lo largo de la curva geodésica y se obtienen sus componentes $U^i(A')$ en el punto A'.
- El recorrido B→B' también es geodésico pero no necesariamente con la misma $\vec{U}$ exacta. La definición de "geodésica paralela" implica que a $\vec{U}$ debe realizársele un transporte paralelo por el trayecto A→B, y la geodésica en B arranca entonces con un $U^i(B)$ posiblemente distinto de $U^i(A)$.
- Las componentes $U^i(B')$ se obtienen por el transporte paralelo B→B'.
  Pero así como están no se pueden comparar contra $U^i(A')$ porque son componentes de vectores pertenecientes a espacios vectoriales diferentes. Falta "*conectarlos*".
- Para cuantificar realmente la deriva geodésica hay que comparar $U^i(B')$ contra el resultado de transportar $U^i(A')$ paralelamente a lo largo de la curva A'→B'.

→ En definitiva: si la deriva no es nula, es porque tenemos un transporte paralelo que da resultados diferentes dependiendo del camino elegido; algo similar a una derivada covariante segunda que depende del orden de derivación. Esta diferencia es lo que se cuantifica matemáticamente con el tensor de Riemann.

El resultado reciente 9.1.4 decía:

$$\delta A^\rho = -R^\rho{}_{\mu\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta A^\mu$$

En este nuevo escenario la cuadrivelocidad es el vector $\vec{A}$ que es transportado, así que sustituimos $\vec{A}\to\vec{U}$.

$$\delta U^\rho = -R^\rho{}_{\mu\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta U^\mu$$

Por otro lado, el cuadrivector $\vec{U}$ también cuantifica una de las direcciones del cuadrilátero de transporte, ya que el segmento(A→A') se escribe como $dX^\beta = U^\beta . d\tau$. Sustituimos:

$$\delta U^\rho = -R^\rho{}_{\mu\alpha\beta}\, dX^\alpha U^\beta d\tau U^\mu \qquad \to \text{dividimos por } d\tau$$

$$\delta U^\rho/d\tau = -R^\rho{}_{\mu\alpha\beta}\, dX^\alpha U^\beta U^\mu$$

Finalmente $\delta U^\rho/d\tau$ tiene unidades de aceleración, es la aceleración relativa del punto B' respecto al punto A', es decir, la desviación geodésica buscada. Renombramos índices ρ→i, μ→n, α→j, β→k y tenemos

$$D^2\delta^i/D\tau^2 = -R^i{}_{njk}\, dX^j U^k U^n$$

Para comparar esta nueva fórmula 9.2.2 con la clásica 8.5.4, debemos situarnos en un contexto lo más parecido posible. En aquel desarrollo las geodésicas arrancaban del reposo, el cuadrivector velocidad solo tenía componente temporal 0 →recreamos ese escenario.
Como en la fórmula tenemos $U^n\, U^k$, debemos conservar solo la combinación de índices n=0 k=0.

$$D^2\delta^i/D\tau^2 = -R^i{}_{njk}\, U^n\, U^k\, dX^j \qquad \to n=0\ k=0$$

$$D^2\delta^i/D\tau^2 = -R^i{}_{0j0}\, U^0 U^0\, dX^j \qquad \to \text{reconocemos } U^0=(c.\dot{t})$$

Aproximamos $\dot{t}\approx 1$ en el límite clásico de las bajas gravedades: $D^2\delta^i/D\tau^2 \approx -c^2 . R^i{}_{0j0}\, dX^j$
La ecuación 8.5.4 decía: $d^2\delta^i/d\tau^2 \approx -dX^j\, \partial_j\partial^i\Phi_g$

Lo que nos lleva a la equivalencia en el límite clásico de:

$c^2.\ R^i{}_{0j0} \approx \partial_j\partial^i\Phi_g$

$R^i{}_{0j0} \approx \partial_j\partial^i(\Phi_g/c^2)$

$2.R^i{}_{0j0} \approx \partial_j\partial^i(2\Phi_g/c^2)$ →Recordamos $g_{oo} = -1+h_{oo}= -(1 + 2.\Phi_g/c^2)$

$2.R^i{}_{0j0} \approx -\partial_j\partial^i h_{oo}$ (h_{oo}=perturbación definida en 7.1.3 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$)

Formulamos la siguiente interpretación: el Riemann sustituye al doble gradiente de la perturbación métrica temporal h_{00} (a menos de un factor –½), y se reduce a él en el límite de los campos bajos.

Finalmente recordamos la definición de Tensor de Ricci, que implica una contracción en i=j.
Lo anterior nos queda es una suma implícita en el índice 'i':

$2.R^i{}_{0i0} \approx -\partial_i\partial^i h_{00}$ →reconocemos operador de d'Alembert

$2.R_{00} \approx -[]^2 h_{00}$

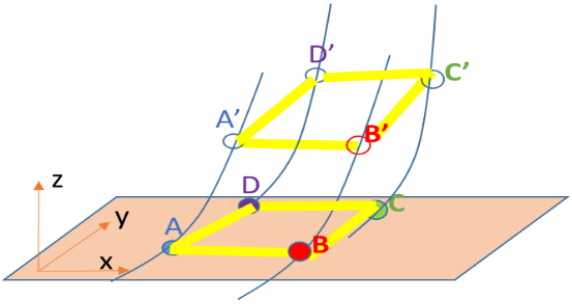
$R_{00} \approx -1/2.\ []^2 h_{00}$

El tensor de Ricci, al menos en su componente 00, sustituye al d'Alembertiano de la alteración métrica h_{00} con un factor de proporcionalidad –1/2, y se reduce a él en el límite de los campos bajos. Al final de este capítulo veremos que el agregado de una condición de calibre permite extender esta misma relación para los restantes componentes de $R_{\alpha\beta}$ y $h_{\alpha\beta}$.

Debemos valorar la importancia del concepto de *sustituir* o generalizar: el Ricci y el Riemann generalizan el efecto de la métrica sobre las trayectorias de la materia. ¡*Y también nos están dando una pista sobre la forma en que las concentraciones de materia perturban y moldean la métrica*!
En una zona vacía de materia, los potenciales Φ_g clásicos (débiles) son armónicos de laplaciano nulo.
→ La generalización relativista será entonces: **métrica de vacío g_{oo} con Ricci nulo en R_{00}**.
Vamos a volver sobre este resultado en los capítulos 10 y 11 cuando abordemos las ecuaciones de campo de Einstein que generalizan a las clásicas de Newton.

9.2.3 Tensor de Ricci y variación de volumen:

Continuamos con la idea de geodésicas vecinas, ampliando ahora el dibujo a una dimensión adicional.
Tenemos 4 puntos A,B,C,D que evolucionan hacia A', B', C', D' describiendo curvas geodésicas.



Podríamos pensar que son los puntos extremos de una pequeña nube de partículas viajeras, cuyo volumen es el producto de la superficie ABCD (aproximadamente plana) por un grosor 'dh' que apenas se llega a apreciar en la escala de la figura.

La contracción Riemann→Ricci implica convertir $R_{nk}=R^i{}_{njk}$ contrayendo i=j
Se lo aplicamos a la fórmula de deriva geodésica, que dice: $D^2\delta^i/D\tau^2 = -R^i{}_{njk}\ U^n\ U^k\ dX^j$.

El índice 'j' describe a la coordenada X^j de desplazamiento inicial entre dos geodésicas, donde arrancan.
El índice 'i' describe la coordenada X^i para la cual queremos ver cómo evoluciona su desviación geodésica.
¿Qué significa contraer j=i? Para las geodésicas que pasan por A,B, apartadas inicialmente $dX^j=dx$, le prestamos atención a la deriva en la coordenada $X^i=x$, mismo índice. Deriva que implica un cambio de volumen: si A'B' están más alejados que A,B →es porque el volumen se está estirando por aumento de la

dimensión-x. Si la tendencia es a acercarse, el volumen se está contrayendo. A los efectos de los puntos A,B separados 'dx', una eventual deriva en la coordenada-y produce deformación de la nube de partículas pero no contribuye a un cambio de volumen, por eso la ignoramos en esta sección.
En cambio, para las geodésicas que pasan por A,D apartadas inicialmente $dX^j=dy$, le prestamos atención a la deriva en la coordenada $X^i=y$. Deriva que también está asociada a un cambio de volumen pero en la otra dimensión-y. Ignoramos en este análisis el alejamiento AD según la coordenada-x porque se asocia a deformación pero no a cambio de volumen.

De acuerdo con esta imagen, ¿qué significa tener un Ricci nulo a partir de un Riemann no nulo?
Esto podría ocurrir si algunas de las dimensiones se estiran y otras se contraen, de tal manera que las contribuciones se cancelan. De eso se trata la contracción de una magnitud tensorial: emparejar índices y sumar.
A modo de ejemplo: Recordemos que la divergencia $\nabla \cdot \vec{J}$ es un tipo de contracción; del gradiente $\nabla \vec{J}$ tomamos solo las variaciones que contribuyen al flujo de carga que se escapa de un determinado volumen de análisis ($\Delta X\ \Delta Y\ \Delta Z$). Queda claro que al *ignorar* algunas variaciones estamos perdiendo información. Para cierto tipo de problemas importa el gradiente completo, para otros escenarios alcanza con la divergencia.
Lo mismo ocurre con la curvatura: algunos fenómenos precisan el Riemann completo, en otros escenarios nos alcanza con restringirnos al Ricci.

Desde el punto de vista matemático se puede demostrar que el tensor de Ricci es el único tensor que puede obtenerse del Riemann a partir de una contracción no trivial.
En esta sección quisimos ir más allá de la matemática pura y presentar al menos una interpretación geométrica de esta magnitud. Podríamos también aventurar una interpretación física, asociando la conservación del volumen a la ausencia de materia en la región ocupada por el conjunto de partículas. Si hubiera materia, el campo gravitatorio tendría una divergencia local (aún en el referencial de caída libre en el que se lo cancela casi totalmente); esa divergencia atraería a las partículas de la periferia y tendería a achicar el volumen de la bola o nube de partículas.

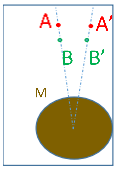
En 8.5.5 habíamos encontrado expresiones que cuantifican la deriva geodésica para condiciones iniciales de reposo y apartamiento en las 3 direcciones coordenadas:

$$\Delta S_x\ddot{}(\tau)/\Delta S_x(0) \approx +c^2.[\partial_0\Gamma^x{}_{0x} - \partial_x\Gamma^x{}_{00}\ ]$$
$$\Delta S_y\ddot{}(\tau)/\Delta S_y(0) \approx +c^2.[\partial_0\Gamma^y{}_{0y} - \partial_y\Gamma^y{}_{00}\ ]$$
$$\Delta S_z\ddot{}(\tau)/\Delta S_z(0) \approx +c^2.[\partial_0\Gamma^z{}_{0z} - \partial_z\Gamma^z{}_{00}\ ]$$

En cada caso aparecen 2 de los 4 términos que definen a los componentes del tensor de Riemann; concretamente, los 2 términos más significativos en régimen de campo débil "*Weak Field*" W.F (porque los productos de Christoffel se consideran infinitésimos de orden superior).
Escribimos entonces: $\Delta S_x\ddot{}(\tau)/\Delta S_x(0) \approx -c^2R^x{}_{0x0}$ $\quad \Delta S_y\ddot{}(\tau)/\Delta S_y(0) \approx -c^2R^y{}_{0y0}$ $\quad \Delta S_z\ddot{}(\tau)/\Delta S_z(0) \approx -c^2R^z{}_{0z0}$
Y la suma de los 3 términos resulta ser la contracción Ricci $R^i{}_{0i0} = R^x{}_{0x0}+R^y{}_{0y0}+R^z{}_{0z0}=R_{00}$.

$$\Delta S_x\ddot{}(\tau)/\Delta S_x(0) + \Delta S_y\ddot{}(\tau)/\Delta S_y(0) + \Delta S_z\ddot{}(\tau)/\Delta S_z(0) = -c^2R_{oo}$$

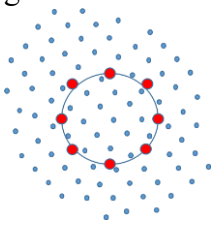
Ejercicio: Estudiar la evolución del volumen para el experimento de caída libre de la sección 7.3.2, ver que hay un ensanchamiento en sentido radial y un angostamiento en las direcciones transversales.



En aquella sección dibujábamos solo 4 puntos en un plano, ahora habrá que agregar otros hasta completar un volumen en 3 dimensiones. Por ejemplo: secciones circulares en los planos AA' y BB' que sean "tapas" de un cono de ángulo $\Delta\theta$ y vértice en el centro de la masa M.

9.2.4 Tensor de Ricci y materia:

Nos proponemos ahora analizar el caso en que una bola esférica de partículas realiza una caída libre geodésica en una zona del espacio donde hay presente "*polvo interestelar*" de densidad ρ_m.



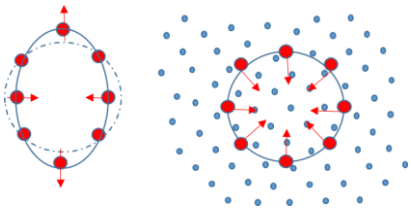
El experimento es más fácil de realizar en la mente que en el espacio real, y aún así requiere un esfuerzo de imaginación: tanto las partículas locales (el polvo, graficado en azul) como las partículas ajenas a la región (las viajeras visitantes, dibujadas en rojo) deben ser de tamaño chico y deben estar alejadas lo suficiente unas de otras como para que no haya ningún contacto mecánico entre ellas. La única interacción considerada en este experimento es la gravitatoria.

Afortunadamente existe un argumento que nos permite despreocuparnos de eventuales "choques", al menos para materia de baja densidad que merezca clasificarse como polvo. Las partículas de polvo, incluso si se están moviendo, deben seguir las órbitas naturales que impone la gravedad local. Es decir → trayectorias geodésicas; por ejemplo, pueden estar orbitando una masa mayor. Nuestras partículas visitantes del experimento eligen entonces un referencial solidario al polvo, también se ponen en órbita. Esto tiene dos ventajas: por un lado resulta ser un referencial de caída libre inercial. Por otro lado, el polvo se ve quieto y no tenemos que complicarnos con "masa móvil", lo describimos con ρ_m =densidad propia.

Numeramos las partículas viajeras con el índice i=1,2,…etc.

Inicialmente todas las partículas de la periferia distan del centro de la nube una misma distancia $r_i=r\ \forall i$.

Nos montamos mentalmente en un referencial solidario al centro de la bola, donde la gravedad se cancela por la caída libre. Para una bola de tamaño finito no puede haber cancelación total, las partículas de la periferia experimentan una desviación geodésica debido a la gravedad no uniforme.



En ausencia de polvo la deriva produce a lo sumo una deformación de la nube, como en la parte izquierda de la figura. En presencia de polvo las partículas viajeras son atraídas hacia el centro y el volumen se reduce.

Advertencia: También puede haber deformación, si hay un gradiente gravitatorio significativo causado por las masas ajenas a la región de estudio. A los efectos de esta sección, para simplificar los cálculos y para analizar de a un efecto por vez, suponemos que no hay ningún gradiente externo significativo que rompa la simetría esférica local.

El volumen de la bola es $Vol=4/3.\pi.r^3$

Su derivada temporal es $dVol/dt = 4.\pi.r^2.\dot{r}$,

inicialmente nula cuando la caída libre recién comienza y se arranca desde el reposo $\dot{r}(0)=0$.

Derivamos una segunda vez:

$Vol^{\cdot\cdot}(t) = 4.\pi.r^2.\ddot{r}$ →hacemos aparecer el volumen inicial $Vol_{(t=0)}=4/3.\pi.r^3$

$Vol^{\cdot\cdot}(t) = 4/3.\pi.r^3 . 3\ddot{r} / r$

$Vol^{\cdot\cdot}(t)/Vol(0) = 3\ddot{r}/r = 3.g(r)/r$

¿Cuánto vale $\ddot{r}=g(r)$? Es la aceleración gravitatoria medida en ese referencial solidario a la nube.

Situarnos en un referencial inercial de caída libre nos permite hacer aproximaciones clásicas inspiradas en la Física de Newton, igual que hacíamos en Relatividad Especial moviéndonos a muy bajas velocidades.

Aplicamos entonces la Ley de Gauss-Newton en su forma integral: $g(r)= -G.M(r)/r^2$,

siendo M(r) la masa de polvo encerrada por la superficie esférica = ρ_m.Vol.

$g(r) = -G.\rho_m.4/3.\pi.r^3/r^2$
$g(r) = -4.\pi.G.\rho_m.r/3$

Sustituimos y llegamos a: $Vol^{\cdot\cdot}(t)/Vol(0) = -4\pi.G.\rho_m$
Combinamos este resultado con lo obtenido en 9.2.2:

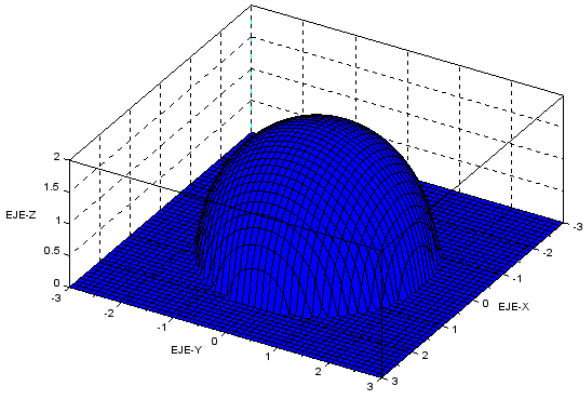
$R_{00} \approx -\frac{1}{2}.[]^2\ g_{oo}$
$R_{00} \approx \frac{1}{2}.[]^2(1+2\Phi/c^2)$
$R_{00} \approx []^2(\Phi)/c^2$
$R_{00} \approx 4\pi G\rho_m/c^2$

Y obtenemos $Vol^{\cdot\cdot}(t)/Vol(0) \approx -c^2.R_{00}$

Advertencia: Esta interpretación basada en el volumen solo mantiene su validez en situaciones como la recién descrita, donde el volumen no presenta ninguna derivada temporal de primer orden $Vol^{\cdot}(\tau)=0$.
La regla más general es que el componente R_{00} del tensor de Ricci, suma de 3 componentes Riemann, cuantifica la desviación geodésica en las dimensiones que contribuyen a un cambio de volumen.
En el capítulo 11 usaremos varias veces este resultado, en entornos más relativistas y menos clásicos donde distinguimos con rigor las derivadas d/dt y d/dτ.
La expresión que utilizaremos será: $\Sigma_i(1/\Delta S_i).d^2\Delta S_i/d\tau^2 = -4.\pi.G.\rho = -c^2.R_{00}$
Los ΔS_i son distancias métricas para i=1,2,3. En coordenadas cartesianas (x,y,z), esféricas (r,θ,φ) o en las que sean acordes al contexto de trabajo.

9.2.5 Curvatura de una cáscara esférica:

Anticipamos que los tensores de curvatura van a ser importantes para describir cómo se genera la gravedad, y consideramos oportuno hacer cuanto antes un ejercicio de cálculo donde podamos comenzar a familiarizarnos con ellos. Los cálculos nos servirán de entrenamiento para cuando utilicemos estos tensores en escenarios gravitatorios, en los capítulos 11 y 12.
Consideramos una variedad llamada "S^2", que consiste en una cáscara esférica embebida en un espacio 3D y parametrizada por θ y φ (r=cte=radio).



Las métricas de la esfera son $dS^2=r^2.(d\theta^2 + sen^2\theta.d\varphi^2)$:
directa $g_{\alpha\beta} = diag(r^2, r^2.sen^2\theta)$
inversa $g^{\alpha\beta} = diag(1/r^2, 1/(r^2sen^2\theta))$

Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(s) = \frac{1}{2} . r^2.(\theta^{\cdot 2} + sen^2\theta.\varphi^{\cdot 2})$ $\quad \theta^{\cdot}=d\theta/ds$, $\quad$ s =longitud de arco.
Los momentos lagrangeanos dan $\quad P_\theta=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta} = r^2.\theta^{\cdot}$ $\quad P_\varphi=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}= r^2.sen^2\theta.\varphi^{\cdot}$
Las ecuaciones de Euler-Lagrange son $\quad dP_\theta/ds =\partial\mathcal{L}/\partial\theta$ $\quad dP_\varphi/ds =\partial\mathcal{L}/\partial\varphi$

Ejercicio: Demostrar que las ecuaciones geodésicas son las siguientes:

$\theta^{\cdot\cdot} - \text{sen}\theta.\cos\theta.\varphi^{\cdot 2} = 0$ →lo que proporciona el coeficiente Christoffel $\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\text{sen}\theta.\cos\theta$

$\varphi^{\cdot\cdot} + 2.\text{ctg}\theta.\theta^{\cdot}.\varphi^{\cdot} = 0$ →lo que determina los coeficientes Christoffel $\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \text{ctg}\theta$

Ordenamos los coeficientes en forma de matrices $[C_\theta]=\Gamma^{\lambda}_{\mu\theta}$ y $[C_\varphi]=\Gamma^{\lambda}_{\mu\varphi}$

$\lambda \setminus \mu$	θ	φ
θ	0	0
φ	0	$\text{ctg}\theta$

←matriz $[C_\theta] = \Gamma^{\lambda}_{\mu\theta}$

$\lambda \setminus \mu$	θ	φ
θ	0	$-\text{sen}\theta.\cos\theta$
φ	$\text{ctg}\theta$	

←matriz $[C_\varphi] = \Gamma^{\lambda}_{\mu\varphi}$

El tensor de Riemann tiene 4 índices $R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}$.
La definición implica una inversión de roles en α y β, es decir, una anti-simetría en esa pareja de índices.
Lo que significa que las combinaciones α=β dan nulas, y $R^{\lambda}_{\mu\beta\alpha} = -R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}$
Solo nos aporta algo útil calcular explícitamente la combinación $R^{\lambda}_{\mu\theta\varphi}$, ya que la otra $R^{\lambda}_{\mu\varphi\theta}$ es la negada.

Para la combinación αβ=θφ tenemos $R^{\lambda}_{\mu\theta\varphi} = \partial_\theta[C_\varphi] - \partial_\varphi[C_\theta] + [C_\theta].[C_\varphi] - [C_\varphi].[C_\theta]$
Podríamos animarnos a emprender los productos matriciales completos, aprovechando que son matrices chicas 2x2. Sin embargo, por experiencia personal, recomendamos concentrarnos de a una fila y columna por vez para reducir los riesgos de errores: fila-λ y columna-μ.
Para la pareja λμ, tenemos $[C_\theta,\text{fil}(\lambda)].[C_\varphi,\text{col}(\mu)] - [C_\varphi,\text{fil}(\lambda)].[C_\theta,\text{col}(\mu)]$.
Otra recomendación que hacemos es concentrarnos en las combinaciones de índices que contribuyen a la diagonal del Ricci, que suelen ser los más importantes para las métricas simplificadas que manejamos en este trabajo introductorio. Esto repercute en que solo calcularemos λμ= θφ y λμ= φθ
Es decir: $R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}$ nos proporciona directamente = $R_{\varphi\varphi}$
$R^{\varphi}_{\theta\theta\varphi}$ no forma parte de ningún Ricci, pero por antisimetría (negación) obtenemos $R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} = R_{\theta\theta}$

Comenzamos con λμ= θφ:

$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \partial_\theta\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^{\theta}_{\varphi\theta}$ + productos matriciales (p.m)

$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \partial_\theta(-\text{sen}\theta.\cos\theta) - (0)$ + p.m = $\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta$ + p.m

$[C_\theta,\text{fil}(\theta)].[C_\varphi,\text{col}(\varphi)]$ =

			σ\μ	θ	φ
			θ	x	-senθcosθ
			φ	x	0
λ\σ	Θ	φ			
θ	0	0			0
φ	X	x			

$[C_\varphi,\text{fil}(\theta)].[C_\theta,\text{col}(\varphi)]$ =

			σ\μ	θ	φ
			θ	x	0
			φ	x	ctgθ
λ\σ	Θ	φ			
θ	0	-senθcosθ			$-\cos^2\theta$
φ	X	x			

Juntamos finalmente los 4 términos, cuidando bien que unos suman y otros restan:

$R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = (\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta) - (0) + (0) - (-\cos^2\theta) = \text{sen}^2\theta$
$\rightarrow R_{\varphi\varphi} = \text{sen}^2\theta$

Advertencia: Obtenemos un valor que no tiene unidades de curvatura, y que además varía con la posición dentro de la esfera, ¿cómo armonizamos este resultado con el concepto de "curvatura homogénea"?
Es común que nos pase algo así con coordenadas angulares, y que nos desorientemos con los índices bajos o altos. Debemos tener paciencia y entrenar lo suficiente hasta adquirir soltura.
La solución a esta aparente molestia se obtiene elevando uno de los índices mediante producto por el tensor métrico dual. $R^{\varphi}{}_{\varphi} = g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} = 1/(r^2\text{sen}^2\theta).R_{\varphi\varphi} = 1/r^2$ $\rightarrow R^{\varphi}{}_{\varphi} = 1/r^2$
Ahora sí obtenemos un valor uniforme en toda la superficie esférica, y con unidades iguales al inverso del radio de curvatura de acuerdo con lo esperado.

Continuamos con $\lambda\mu = \varphi\theta$:

$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = \partial_{\theta}\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} - \partial_{\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}$ + productos matriciales (p.m) $= \partial_{\theta}(\text{ctg}\theta) - (0)$ + (p.m)

$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = (-1/\text{sen}^2\theta) - (0)$ + (p.m)

$[C_{\theta},\text{fil}(\varphi)].[C_{\varphi},\text{col}(\theta)] =$

			σ\μ	θ	φ
			θ	0	x
			φ	ctgθ	x
λ\σ	Θ	φ			
θ	X	X			
φ	0	ctgθ		$\cos^2\theta/\text{sen}^2\theta$	

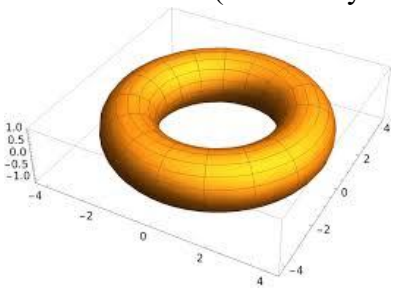
$[C_{\varphi},\text{fil}(\varphi)].[C_{\theta},\text{col}(\theta)] =$

			σ\μ	θ	φ
			θ	0	x
			φ	0	x
λ\σ	Θ	φ			
θ	X	X			
φ	ctgθ	0		0	

Juntamos los 4 términos, 2 suman y 2 restan:
$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = (-1/\text{sen}^2\theta) - (0) + (\cos^2\theta/\text{sen}^2\theta) - (0) =$
$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = (\cos^2\theta - 1)/\text{sen}^2\theta = -1$
De nuevo nos da un número sin unidades de curvatura. Y para peor, ¡esta vez es negativo!
No desesperemos. El componente que nos interesa para la diagonal del Ricci es el negado $R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} = -R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi}$
$R_{\theta\theta} = R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} = 1$
Subimos índice $R^{\theta}{}_{\theta} = g^{\theta\theta}.R_{\theta\theta}$ $\rightarrow R^{\theta}{}_{\theta} = 1/r^2$

Entonces tenemos un tensor Ricci totalmente homogéneo cuando lo vemos con índices mixtos.
$R^{\alpha}{}_{\beta} = 1/r^2.\ g^{\alpha}{}_{\beta}$ (proporcional a la matriz identidad)
El escalar de Ricci (la traza) da la suma de los elementos de la diagonal, en este caso $2/r^2$.
Igual que con el paraboloide elíptico en su vértice, nos da el doble de la curvatura gaussiana (definida en los cursos de Geometría Diferencial como el producto de sus curvaturas principales).

<u>Actividad</u>: Estudiar el toro de revolución ("*doughnut*" o "*rosquilla*").
Registrar sus propiedades principales y tratar de entenderlas.
Con suficiente paciencia ya deberíamos estar en condiciones de demostrar las 3 primeras.
Las dos últimas (Riemann y Ricci) pueden diferirse para un próximo capítulo.



R=radio mayor r=radio menor

1-Parametrización: $x=(R+r.\cos\theta)\cos\varphi$ $y=(R+r.\cos\theta)\text{sen}\varphi$ $z=r.\text{sen}\theta$

2-Métrica: $dS^2 = r^2.d\theta^2 + (R+r.\cos\theta)^2 d\varphi^2$

3-Christoffel: $\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}=(R+r.\cos\theta)\text{sen}\theta/r$ $\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}= \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}= - r.\text{sen}\theta/(R+r.\cos\theta)$

4-Riemann: $R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}=(R+r.\cos\theta)\cos\theta/r$ $R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta}=r.\cos\theta/(R+r.\cos\theta)$

5-Ricci: $R^{\theta}_{\theta}= R^{\varphi}_{\varphi}= \cos\theta/r/(R+r.\cos\theta)$

Observar que hay zonas de la rosquilla con *curvatura negativa* (Ricci<0 cuando $\cos\theta<0$).
Eso no es nada raro ni antinatural, simplemente ocurre en puntos en donde los arcos de curvatura principal envuelven a la superficie con concavidades opuestas (como en la silla de montar). Y repercute en que las geodésicas localmente paralelas tienden a alejarse.
Sería distinto si esta condición Ricci<0 fuera encontrada en un espaciotiempo con materia. El alejamiento geodésico podría interpretarse como asociado a una repulsión opuesta a la gravedad "normal" (atractiva), y para crear ese efecto se precisaría materia de un tipo muy diferente al normal conocido.

9.3 Electromagnetismo en espacios curvos.

Dividimos el estudio en las siguientes etapas:
* Comenzamos con un espaciotiempo ideal donde vale la Relatividad Especial, y allí *inventamos* curvatura artificial a través de un cambio de variable a coordenadas curvilíneas.
* Luego repetimos las ideas para las coordenadas solidarias a un sistema acelerado; sigue siendo una variante de espaciotiempo plano descrito en coordenadas curvilíneas, pero ahora el parecido con la gravedad es mucho más marcado.
* Finalmente estaremos en condiciones de aceptar la curvatura (inevitable) que genera la presencia de masas en el espaciotiempo real, para entonces ya tendremos mejores herramientas para abordar el estudio.

Los cuadrivectores y tensores protagonistas serán:

carga-corriente	$\mathcal{J4}^{\rightarrow}=J^{\alpha}.E_{\alpha}{}^{\rightarrow}$	unidades Amp/m^2
cuadripotencial	$\mathcal{A4}^{\rightarrow}=A^{\alpha}.E_{\alpha}{}^{\rightarrow}$	Volt.s/m
cuadrifuerza	$\mathcal{F4}^{\rightarrow}=F^{\alpha}.E_{\alpha}{}^{\rightarrow}$	N=Newton
cuadrivelocidad	$\mathcal{U4}^{\rightarrow}=U^{\alpha}.E_{\alpha}{}^{\rightarrow}$	m/s
tensor de campo electromagnético	{F}	N/(Amp.m)

Cada término de cada cuadrivector tiene las unidades correspondientes a su magnitud física.
Cualquiera sea la base coordenada que elijamos (cartesianas, cilíndricas, esféricas, Rindler, gravitatorias…), esta propiedad se debe conservar. Los vectores también tienen asociada una dirección en la que "apunta su flecha"; esto será especialmente importante cuando nos estemos moviendo en una variedad curva: los vectores físicos apuntan siempre dentro de su plano tangente local, nunca apuntan perpendicular a la superficie.

Las leyes invariantes se deben enunciar en términos de estos vectores invariantes (quienes varían son los componentes, no los vectores). Cuando hay involucrados tensores, las leyes físicas invariantes se expresan como $F^{\rightarrow}=q.\{F\}U^{\rightarrow}$. El tensor de campo electromagnético es una aplicación {F} que opera sobre la velocidad propia $U^{\rightarrow}$. El resultado es la fuerza de Lorentz sobre una partícula de carga 'q'. Con cada elección de coordenadas esperamos encontrarnos con esta relación entre componentes $F_{\alpha}=q.F_{\alpha\beta}.U^{\beta}$.

9.3.1 Electromagnetismo en coordenadas cilíndricas:

Comenzamos con el sistema de coordenadas curvilíneas más simple posible: las coordenadas cilíndricas.
Y mantenemos el vínculo con los escenarios clásicos a los que estamos más acostumbrados.
Para no tener confusiones con la notación, debemos diferenciar las magnitudes clásicas de las relativistas.
Las cantidades clásicas son: $\vec{A}=A[r].\hat{e}_r + A[\varphi].\hat{e}_{\varphi} + A[z].\hat{e}_z$, $\vec{E}=E[r].\hat{e}_r + E[\varphi].\hat{e}_{\varphi} + E[z].\hat{e}_z$

- los vectores con techo triangular ê son versores de norma unitaria.
- las componentes se indizan con corchetes y tienen todas la misma unidad.

Las cantidades relativistas son diferentes: $A^{\rightarrow} = A^r.E_r{}^{\rightarrow} + A^{\varphi}.E_{\varphi}{}^{\rightarrow} + A^z.E_z{}^{\rightarrow}$,

- los vectores base $E_{\alpha}{}^{\rightarrow}$ (al menos algunos) pueden no tener norma unitaria.
- los componentes no tienen todos la misma unidad, y llevan índice alto o bajo acorde a la varianza.

Las relaciones entre unas y otras son:

$E_r{}^{\rightarrow}=\hat{e}_r$	$A^r=A[r]$	$A_r=A[r]$
$E_{\varphi}{}^{\rightarrow}=r.\hat{e}_{\varphi}$	$A^{\varphi}=A[\varphi]/r$	$A_{\varphi}=r.A[\varphi]$
$E_z{}^{\rightarrow}=\hat{e}_z$	$A^z=A[z]$	$A_z=A[z]$

Subimos y bajamos índices pero no con la métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ sino con una métrica $g_{\alpha\beta}$ adaptada a las coordenadas cilíndricas $g_{00}=-1$, $g_{rr}=1$, $g_{\varphi\varphi}=r^2$, $g_{zz}=1$, que expandida resulta en:

$(dS)^2 = -(c.dt)^2 + (dr)^2 + r^2.d\varphi^2 + (dz)^2$
El determinante del tensor métrico es $g= -r^2$
El tensor inverso tiene $g^{00}= -1$, $g^{rr}=1$, $g^{\varphi\varphi}=1/r^2$, $g^{zz}=1$

Para los campos electromagnéticos mantenemos la definición tensorial $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$.
Exploramos cuidadosamente todas las celdas del tensor de campo.

Campo eléctrico:
El campo eléctrico radial no tiene diferencias con las coordenadas cartesianas, no hay factores de escala.

$F_{r0}=\partial_r A_0 - \partial_0 A_r$
$F_{r0}=\partial_r(-\Phi/c) - \partial_{ct}(A[r])$
$F_{r0}=1/c.\ (-\partial_r\Phi - \partial_t A[r])$
$\rightarrow F_{r0}= E[r]/c \qquad F_{0r}= -E[r]/c$

Tampoco hay diferencia en la componente-z.

$F_{z0}=\partial_z A_0 - \partial_0 A_z$
$F_{z0}=\partial_z(-\Phi/c) - \partial_{ct}(A[z])$
$F_{z0}=1/c.\ (-\partial_z\Phi - \partial_t A[z])$
$\rightarrow F_{z0}= E[z]/c \qquad F_{0z}= -E[z]/c$

Los factores de escala aparecen en las componentes angulares. Sugerimos consultar material especializado para recordar o deducir cómo quedan en coordenadas cilíndricas y esféricas el gradiente, la divergencia y el rotor.

$F_{\varphi0}=\partial_\varphi A_0 - \partial_0 A_\varphi$
$F_{\varphi0}=\partial_\varphi(-\Phi/c) - 1/c.\partial_t(r.A[\varphi])$
$F_{\varphi0}= -r/c.(\mathbf{1/r.\partial_\varphi\Phi + \partial_t A[\varphi]})$
$F_{\varphi0}= r.\mathbf{E[\varphi]}/c \qquad \rightarrow F_{0\varphi}= -r.\mathbf{E[\varphi]}/c$

Campo magnético:

$F_{r\varphi}=\partial_r A_\varphi - \partial_\varphi A_r$
$F_{r\varphi}=\partial_r(r.A[\varphi]) - \partial_\varphi(A[r])$
$F_{r\varphi}= r\ .[\ \mathbf{1/r.\partial_r(r.A[\varphi]) - 1/r.\partial_\varphi A[r]}\ ] \rightarrow F_{r\varphi}= r.\mathbf{B[z]}$

$F_{\varphi z}=\partial_\varphi A_z - \partial_z A_\varphi$
$F_{\varphi z}=\partial_\varphi A[z] - \partial_z(r.A[\varphi])$
$F_{\varphi z}=r.(\ \mathbf{1/r.\partial_\varphi A[z] - \partial_z A[\varphi]}\ )$
$F_{\varphi z}=r.\ \mathbf{B[r]}$

$F_{zr}=\partial_z A_r - \partial_t A_z$
$F_{zr}=\partial_z A[r] - \partial_t(A[z])$
$F_{zr}=\mathbf{B[\varphi]}$

Tensor de campo:
El tensor covariante completo resulta $F_{\alpha\beta}$:

α \ β	ct	r	φ	Z
Ct	0	–E[r]/c	–r.E[φ]/c	–E[z]/c
R	E[r]/c	0	r.B[z]	–B[φ]
φ	r.E[φ]/c	–r.B[z]	0	r.B[r]
Z	E[z]/c	B[φ]	–r.B[r]	0

Ejercicio: Intentar llegar a este mismo resultado partiendo del tensor en coordenadas cartesianas F_{ij} y aplicando el doble producto por los jacobianos: $F_{\alpha\beta}=\partial x^i/\partial X^\alpha . F_{ij} . \partial x^j/\partial X^\beta$.

Sugerencia: Reconocer las proyecciones E[r]=Ex.cosφ+Ey.senφ, E[φ]= –Ex.senφ+Ey.cosφ…etc

Fuerza de Lorentz:
Comprobaremos que sigue siendo válida la expresión tensorial $F_\alpha=q.F_{\alpha\beta}U^\beta$, a pesar del cambio a coordenadas curvilíneas. Esa es la propiedad que queremos para las leyes físicas.
La única precaución a tener en cuenta es que las unidades de las componentes F_α no son necesariamente unidades de fuerza [Newton]. En estas coordenadas F_φ tiene unidades de torque o momento [Newton.metro].

La velocidad propia en coordinadas cilíndricas es $U^\beta=(c\dot{t}, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z})$, y se relaciona con la velocidad $\vec{u}$ clásica según las fórmulas: $r\dot{} = t\dot{}.u[r]$ $r.\varphi\dot{} = t\dot{}.u[\varphi]$ $z\dot{} = t\dot{}.u[z]$

Las componentes de la fuerza de Lorentz son:
radial-r) $F_r=q.F_{r\beta}U^\beta$

$F_r=q.(F_{r0}U^0 + F_{r\varphi}U^\varphi + F_{rz}U^z)$ →sustituimos los casilleros del tensor
$F_r=q.(E[r]/c.c.t\dot{} + r.B[z].\varphi\dot{} - B[\varphi].z\dot{})$
$F_r=q.(E[r].t\dot{} + B[z].r.\varphi\dot{} - B[\varphi].z\dot{})$ →hacemos aparecer las velocidades clásicas
$F_r=q.(E[r].t\dot{} + B[z].t\dot{}.u[\varphi] - B[\varphi].t\dot{}.u[z])$ →factor común $t\dot{}$
$F_r=q.t\dot{}.(E[r] + u[\varphi].B[z] - u[z].B[\varphi])$ →reconocemos $(\vec{u} \wedge \vec{B})$ en dirección $\hat{r}$

angular-φ) $F_\varphi=q.F_{\varphi\beta}U^\beta$

$F_\varphi=q.(F_{\varphi0}U^0 + F_{\varphi r}U^r + F_{\varphi z}U^z)$ →sustituimos los casilleros del tensor
$F_\varphi=q.(r.E[\varphi]/c.c.t\dot{} - r.B[z].r\dot{} + r.B[r].z\dot{})$
$F_\varphi=q.(r.E[\varphi].t\dot{} - r.B[z].r\dot{} + r.B[r].z\dot{})$ →factor común r
$F_\varphi=q.r.(E[\varphi].t\dot{} - B[z].r\dot{} + B[r].z\dot{})$ →hacemos aparecer las velocidades clásicas
$F_\varphi=q.r.(E[\varphi].t\dot{} - B[z].u[r].t\dot{} + B[r].u[z].t\dot{})$ →factor común $t\dot{}$
$F_\varphi=q.r.(E[\varphi] - u[r].B[z] + u[z].B[r])$ →reconocemos $(\vec{u} \wedge \vec{B})$ en dirección $\hat{\varphi}$

→El factor de escala 'r' es el "brazo del momento", que multiplica a la fuerza para dar unidades de torque (En coordenadas esféricas aparecería un "brazo"=r.senθ)

axial-z) $F_z=q.F_{z\beta}U^\beta$

Los cálculos son muy similares a los radiales, no los repetimos
$F_z=q.t\dot{}.(E[z] + u[r].B[\varphi] - u[\varphi].B[r])$ →reconocemos $(\vec{u} \wedge \vec{B})$ en dirección $\hat{z}$

Tensor de campo contravariante:
En la sección 5.6.2 obteníamos las componentes contravariantes como $\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$. Advertimos que aquello era válido en coordenadas cartesianas, cuando los componentes métricos no dependen de las coordenadas. También podría sostenerse para situaciones de gravedad débil cuando la variación posicional de la métrica es muy poco significativa, pero no para este caso de coordenadas cilíndricas.
El procedimiento correcto es subir índices con un doble producto matricial: $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda} F_{\lambda\mu} g^{\mu\beta}$.
Ejercicio: Realizar los cálculos. Recordar que la métrica inversa es $g^{\alpha\beta}=\text{diag}(-1,1,1/r^2,1)$.

El resultado es $F^{\alpha\beta} =$

α \ β	ct	r	φ	z
Ct	0	E[r]/c	E[φ]/r/c	E[z]/c
R	–E[r]/c	0	B[z]/r	–B[φ]
φ	–E[φ]/r/c	–B[z]/r	0	B[r]/r
Z	–E[z]/c	B[φ]	–B[r]/r	0

El invariante mantiene su valor esperado $F_{\alpha\beta}.F^{\alpha\beta}=2.(B^2-E^2/c^2)$, siendo:
$B^2 = B[r]^2 + B[\theta]^2 + B[\varphi]^2$ $E^2 = E[r]^2 + E[\theta]^2 + E[\varphi]^2$

En Relatividad Especial ambos tensores contenían la misma información.
La única diferencia era algún que otro signo cambiado derivado del hecho de que *subir o bajar índices con la métrica de Minkowski solamente implicaba un cambio de signo en algunas componentes*.
Ahora el escenario se complica un poco más porque subir y bajar índices involucra multiplicar por factores diferentes de +1 y -1, y las componentes clásicas de los campos no aparecen puras dentro de los tensores, pueden verse afectadas por factores multiplicativos.

Ecuaciones tensoriales:
Así como el tensor covariante sirve para formular la fuerza de Lorentz, la forma contravariante sirve para tomar la divergencia y llegar a las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo NO ES CORRECTO tomar la derivada simple respecto a las coordenadas, $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \neq -\mu_o.J^\beta$.
La expresión correcta en componentes surge de calcular la divergencia con *la derivada covariante, no con la derivada coordenada* : $\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_o.J^\beta$.
La formulación universal, independiente de la base y de las coordenadas elegidas, es $\nabla \cdot \{F\} = -\mu_o.\vec{J}$.
{F} es una aplicación, como lo es el tensor métrico {g}. Sus reglas de actuación, cómo toman parejas de vectores y devuelven números, son independientes de la base coordenada.

Para la divergencia covariante podemos valernos de la fórmula deducida en 9.2.1 basada en la raíz del determinante $\sqrt{g}$, extendiendo el razonamiento a un espaciotiempo de 4 dimensiones. Ahora el determinante es negativo, por lo tanto debe negarse antes de ubicarse dentro de la raíz.
La fórmula que necesitamos para la cuadri-divergencia es:
$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 1/\sqrt{-g}\ .\partial_\alpha(\sqrt{-g}\ .F^{\alpha\beta})$$

Recorremos una a una las columnas del tensor de campo para calcular su divergencia:
Temporal)

$-\mu_0.J^0 = \nabla_\alpha F^{\alpha 0}$	→reconocemos $J^0 = c.\rho$
$-\mu_0.c.\rho = \nabla_\alpha F^{\alpha 0}$	→divergencia covariante
$-\mu_0.c.\rho = 1/\sqrt{-g}\ .\partial_\alpha(\sqrt{-g}\ .F^{\alpha 0})$	→sustituimos $g = -r^2$
$-\mu_0.c.\rho = 1/r.\partial_\alpha(r.F^{\alpha 0})$	→expandimos suma de α=0 a α=3
$-\mu_0.c.\rho = 1/r.[\partial_r(r.F^{r0}) + \partial_\varphi(r.F^{\varphi 0}) + \partial_z(r.F^{z0})]$	→sustituimos componentes del tensor
$-\mu_0.c.\rho = -1/r.[\partial_r(r.E[r]/c) + \partial_\varphi(r.E[\varphi]/r/c) + \partial_z(r.E[z]/c)]$	→multiplicamos por (-c)
$\mu_0.c^2.\rho = 1/r.[\partial_r(r.E[r]) + \partial_\varphi(r.E[\varphi]/r) + \partial_z(r.E[z])]$	→expandimos
$\mu_0.c^2.\rho = 1/r.\partial_r(r.E[r]) + 1/r.\partial_\varphi(E[\varphi]) + \partial_z(E[z])$	→recordamos $\mu_0.\epsilon_o = 1/c^2$
$\rho/\epsilon_o = 1/r.\partial_r(r.E[r]) + 1/r.\partial_\varphi(E[\varphi]) + \partial_z(E[z])$	

Reconocemos la divergencia en coordenadas cilíndricas, y nos queda la Ley de Gauss-Coulomb:
$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_o$$

Radial)

$-\mu_0.J^r = \nabla_\alpha F^{\alpha r}$	→reconocemos $J^r = j[r]$
$-\mu_0.j[r] = \nabla_\alpha F^{\alpha r}$	→divergencia covariante
$-\mu_0.j[r] = 1/r.\partial_\alpha(r.F^{\alpha r})$	→expandimos suma
$-\mu_0.j[r] = 1/r.[\partial_0(r.F^{0r}) + \partial_\varphi(r.F^{\varphi r}) + \partial_z(r.F^{zr})]$	→sustuimos casilleros del tensor
$-\mu_0.j[r] = 1/r.[\partial_{ct}(r.E[r]/c) - \partial_\varphi(r.B[z]/r) + \partial_z(r.B[\varphi])]$	→expandimos y simplificamos
$-\mu_0.j[r] = \partial_{ct}(E[r]/c) - 1/r.\partial_\varphi(B[z]) + \partial_z(B[\varphi])$	→factor c
$-\mu_0.j[r] = 1/c^2.\partial_t E[r] - 1/r.\partial_\varphi(B[z]) + \partial_z(B[\varphi])$	→reordenamos
$1/r.\partial_\varphi B[z] - \partial_z B[\varphi] = \mu_0.j[r] + 1/c^2.\partial_t E[r]$	

Identificamos el rotor en coordenadas cilíndricas y nos queda la Ley de Ampere según dirección r^.

Acimutal)

$-\mu_0.J^{\varphi} = \nabla_\alpha F^{\alpha\varphi}$ → $J^{\varphi}=j[\varphi]/\mathbf{r}$. ¡Atención al factor r!

$-\mu_0.\ j[\varphi]/r = \nabla_\alpha F^{\alpha\varphi}$ →divergencia covariante

$-\mu_0.\ j[\varphi]/r = 1/r.\partial_\alpha(r.F^{\alpha\varphi})$ →expandimos suma

$-\mu_0.\ j[\varphi]/r = 1/r.[\partial_{ct}(r.F^{0\varphi})+\partial_r(r.F^{r\varphi})+\partial_z(r.F^{z\varphi})]$ →sustituimos componentes del tensor

$-\mu_0.\ j[\varphi]/r = 1/r.[\partial_{ct}(r.E[\varphi]/r/c)+\partial_r(r.B[z]/r) -\partial_z(r.B\ [r]/r)]$

$-\mu_0.\ j[\varphi]/r = 1/r.[\partial_{ct}(E[\varphi]/c)+\partial_r(B[z])-\partial_z(B[r])]$ →multiplicamos por factor 'r'

$-\mu_0.\ j[\varphi] = \partial_{ct}(E[\varphi]/c) +\partial_r B[z]-\partial_z B[r]$ →reordenamos

$\partial_z B[r]-\partial_r B[z] = \mu_0.\ j[\varphi] +1/c^2.\partial_t E[\varphi]$

Reconocemos el rotor en coordenadas cilíndricas y nos queda la Ley de Ampere según dirección φˆ.

Axial)

$-\mu_0.J^z = \nabla_\alpha F^{\alpha z}$ →reconocemos $J^z=j[z]$

$-\mu_0.j[z] = \nabla_\alpha F^{\alpha z}$ →divergencia covariante

$-\mu_0.j[z] = 1/r.\partial_\alpha(r.F^{\alpha z})$ →expandimos suma

$-\mu_0.j[z] = 1/r.[\partial_{ct}(r.F^{0z}) +\partial_r(r.F^{rz}) + \partial_\varphi(r.F^{\varphi z})]$ →sustuimos casilleros del tensor

$-\mu_0.j[z] = 1/r.[1/c.\partial_t(r.E[z]/c) -\partial_r(r.B[\varphi]) + \partial_\varphi(r.B[r]/r)\ ]$ →expandimos y simplificamos

$-\mu_0.j[z] = 1/c^2.\partial_t E[z] -1/r.\partial_r(r.B[\varphi]) + 1/r.\partial_\varphi B[r]$ →reordenamos

$1/r.\partial_r(r.B[\varphi]) - 1/r.\partial_\varphi B[r] = \mu_0.j[z] + 1/c^2.\partial_t E[z]$

Reconocemos el rotor en coordenadas cilíndricas y nos queda la Ley de Ampere según dirección zˆ.

Juntando las 3 componentes espaciales se forma exactamente $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0.\vec{J} + 1/c^2.\partial_t\vec{E}$

9.3.2 Espaciotiempo "acelerado":

Ahora simularemos gravedad mediante aceleración, como paso intermedio antes de estudiar espacios curvados por efecto de la gravedad.
La primera situación que analizaremos es la conservación de la carga eléctrica.
En los capítulos 2 y 3 de Relatividad Especial nos encontramos por primera vez con la ecuación de continuidad $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ que era invariante frente a transformaciones de Lorentz y que se asociaba a la conservación de la carga eléctrica. Veremos ahora cómo se modifica esta situación en un sistema acelerado.

Tomamos como punto de partida un espacio-tiempo aproximadamente plano, con la métrica muy levemente perturbada debido a que nos ubicamos (al menos mentalmente) lo más lejos posible de las masas atractoras.
En este espacio-tiempo Σ se cumplen:

- la métrica de Minkowski: $(dS)^2 = -(c.dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$
- la ecuación de continuidad $\partial_t \rho + \partial_x J^x + \partial_y J^y + \partial_z J^z = 0$

Simulamos gravedad mediante un cambio de coordenadas de Rindler pasando a un referencial acelerado Σ'.

$ct = X.sh(c.T/X_H)$
$x = X.ch(c.T/X_H)$

En Σ' tenemos:

- la métrica de Rindler: $(dS)^2 = -(X/X_H)^2.(c.dT)^2 + (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2$
- falla la ecuación de continuidad $\partial_T(\rho') + \partial_X J'^X + \partial_Y J'^Y + \partial_Z J'^Z \neq 0$

Lo que está fallando no es la conservación de la carga; no hay pérdida de carga por ningún lado.
Desde el punto de vista conceptual, lo que ocurre es que las densidades de carga están ligadas al concepto de simultaneidad: carga presente en este instante. El concepto de simultaneidad se altera con el movimiento relativo, ya lo vimos en el caso de velocidad uniforme. Y ahora cambia más todavía cuando uno de los sistemas está acelerado respecto al otro.
Desde el punto de vista matemático, el problema está en tomar la divergencia coordenada $\partial_\alpha J^\alpha$, que no contempla ese cambio en la simultaneidad. Debemos usar la divergencia covariante, que sí contempla este detalle, y la ecuación de continuidad correcta pasa a ser $\nabla_\alpha J^\alpha = 0$.

En el espaciotiempo Minkowski la ley de conservación es $\partial_i J^i = 0$.
Aplicamos el cambio de variable Rindler a los componentes del cuadrivector y a los operadores de derivada, realizando operaciones similares a las de la sección 8.2.2, y lo que nos queda es $\nabla_\alpha J^\alpha = 0$.
Expresamos en coordenadas Rindler el resultado:
$\partial_T(\rho') + (\mathbf{1/X}).\partial_X(\mathbf{X}.J'^X) + \partial_Y J'^Y + \partial_Z J'^Z = 0$
Siendo $J'^\alpha = (c.\rho', J'^X, J'^Y, J'^Z)$ el cuadrivector carga-corriente en Σ'.

La matemática está diciendo que las soluciones de corriente estacionaria ($\partial_T = 0$) no son con J'^X uniforme, lo que es constante es el producto $X.J'^X$. Es similar a lo que ocurre en configuraciones geométricas con simetría circular cuando se utilizan coordenadas curvilíneas acordes a la geometría, por ejemplo:

- flujos estacionarios con $(r.J^r) = cte$ en geometrías cilíndricas
- flujos estacionarios con $(r^2.J^r) = cte$ en geometrías esféricas.

En la sección 9.2.1 presentábamos un modelo de divergencia genérica para coordenadas curvilíneas, basado en la raíz del determinante del tensor métrico: $\sqrt{g}$. Aquella fórmula encuadraba perfectamente con lo observado en las geometrías circulares, ya que:

- $\det(g) = r^2$ en coordenadas cilíndricas $\rightarrow \sqrt{g} = r$
- $\det(g) = r^4.\text{sen}^2\theta$ en coordenadas esféricas $\rightarrow \sqrt{g} = r^2.\text{sen}\theta$

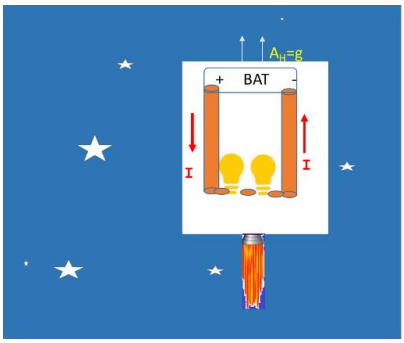
Las mismas ideas son extrapolables al espacio cuadridimensional con una cuarta dimensión "*timelike*", con la advertencia de que ahora *el determinante pasa a ser negativo y debemos trabajar con* $\sqrt{-g}$.

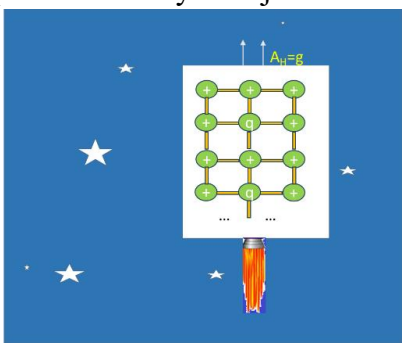
Para la métrica de Rindler $g= -(X/X_H)^2 \rightarrow \sqrt{-g} = X/X_H$

Los flujos estacionarios según X deben verificar:

$$\partial_X(\sqrt{-g}\ .J'^X)=0,\ \partial_X(X/X_H.J'^X)=0 \qquad \rightarrow X.J'^X=cte$$

Intentaremos encontrarle una interpretación física a este fenómeno que ocurre en las coordenadas Rindler de un sistema acelerado. Suponemos que tenemos un circuito de corriente continua formado por batería y luces LED, lo alineamos con un plano vertical y lo dejamos caer desde el techo de la nave espacial.





También lanzamos en caída libre un arreglo de cargas '+q' separadas uniformemente, unidas por varillas que evitan la repulsión electrostática (figura derecha).
El referencial de caída libre es Σ, exactamente inercial porque corresponde al espaciotiempo plano de Minkowski. Aquí vale la Relatividad Especial.

En el ejemplo de la batería (figura izquierda) resaltamos 2 propiedades eléctricas comunes al cable de bajada y al cable de subida:

- $\rho=0$ porque el cable tiene neutralidad espacial, balance exacto entre iones(+) y portadores(-)
- J^x=uniforme para mantener el estado estacionario

El referencial Σ' es el de la nave espacial. ¿Cómo se describe este experimento?
A medida que transcurre un tiempo T, se ve que el circuito comienza a bajar con velocidad $v(T)\approx -A_H.T$
El cable en movimiento ya no se ve neutro, se desarrolla una carga espacial según vimos en el capítulo 3.2.3:
$\rho'(T)\approx J^x.v(T)/c^2 \approx -J^x.\ A_H.T/c^2$
Recordamos la relación de 6.5 $X_H=c^2/A_H$ y reescribimos:
$\rho'(T)\approx -J^x.T/X_H \qquad \rightarrow \partial\rho'/\partial T\approx -J^x/X_H$.

Tenemos carga variando en el tiempo, y un razonamiento clásico nos llevaría a pensar que precisamos una corriente no-uniforme.
En el cable izquierdo de bajada (desde el borne + hacia el ánodo de los LEDs) la corriente es negativa según $-\vec{X}$ y la carga ρ' es positiva. Precisamos que al atravesar cada segmento ΔX, la corriente que entra por arriba sea levemente superior a la que sale por abajo, así "*va dejando cargas por el camino*".

Sin embargo, el cuadrivector en Σ' tiene su componente J'^X=uniforme. Esto lo podemos ver por las fórmulas simplificadas para bajas velocidades $J'^X \approx J^x + v(T).\rho = J^x$ por ser $\rho=0$.
Si incluyéramos una corrección por factor $\gamma=1/\sqrt{1-v^2(T)/c^2}$ aparecería una variación en el tiempo, pero no cambiaría la uniformidad ∀X a lo largo del cable.

Para experimentos prácticos con gravedades similares a la terrestre $g\approx 10 m/s^2$ podríamos despreocuparnos del problema, ya que el denominador contiene un factor $c^2\sim 10^{16}$.

Pero desde el punto de vista teórico no podemos permitir esa falla en la conservación de la carga.
Lo que debemos hacer es modificar la ecuación que describe la conservación de la carga, utilizando derivada covariante en lugar de derivada coordenada.
También debemos reformular nuestra idea de "conservación"; en la página siguiente intentaremos visualizar en un diagrama espacio-tiempo las trayectorias de las partículas cargadas.
La divergencia covariante en coordenadas Rindler es $\nabla_\alpha J'^\alpha=0$.

$$\partial_T\rho'(T) + 1/X.\partial_X(X.J'^X) = -J^x/X_H + 1/X.\partial_X(X.J^x)$$
$$= -J^x/X_H + 1/X.J^x$$
$$= J^x.(1/X - 1/X_H) \approx 0$$

Si la falla era chica, ahora es mucho menor. Nos aparece en el denominador un segundo factor 10^{16}, (total 10^{32}) mientras que el numerador pasa a ser X_H–X, del orden de decenas o cientos de metros.

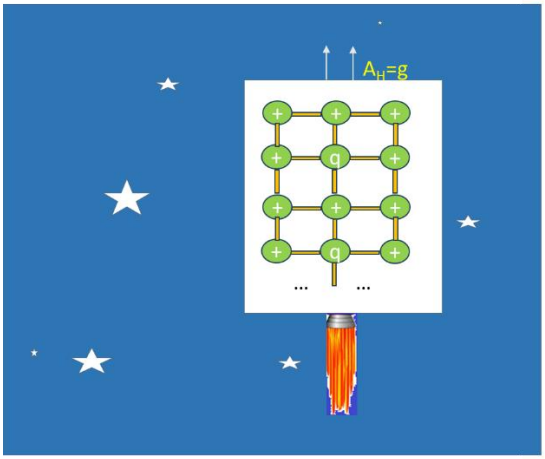
Ejercicio: Calcular los jacobianos de Rindler para obtener las reglas de transformación (ρ', J'^X) vs. (ρ, J^x), y demostrar que la aproximación ≈0 se convierte en una igualdad exacta =0.
Si abreviamos ()=(cT/X_H), los resultados deberían dar:

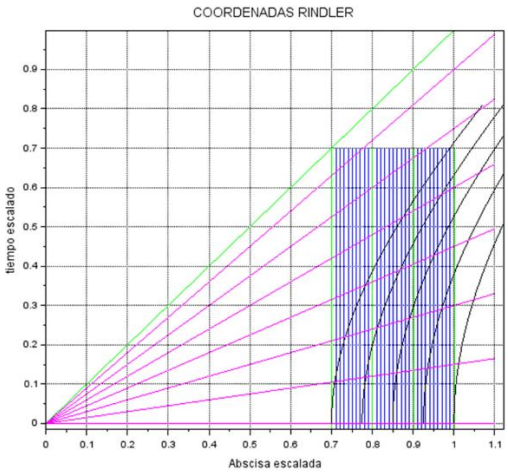
Jacobiano directo $JD^i{}_\alpha=\partial x^i/\partial X^\alpha$: Jacobiano inverso $JI^\alpha{}_i=\partial X^\alpha/\partial x^i$:

$$\begin{bmatrix} X/X_H.ch() & sh() \\ X/X_H.sh() & ch() \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_H/X.ch() & -X_H/X.sh() \\ -sh() & ch() \end{bmatrix}$$

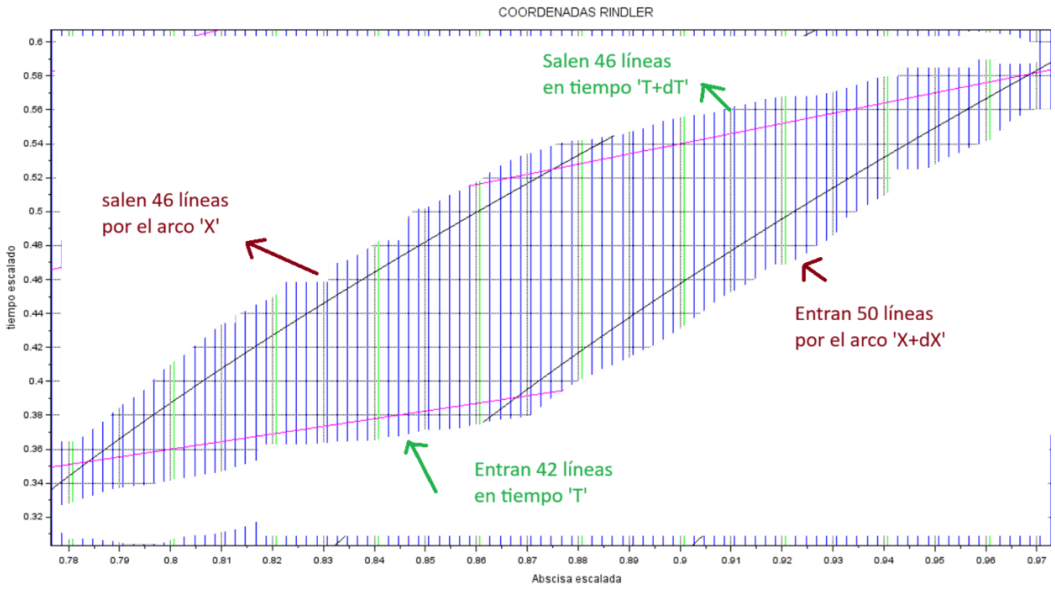
carga: $c\rho'=J'^0=\partial X^0/\partial x^i\ J^i = \partial(cT)/\partial x.J^x= -X_H/X.sh(cT/X_H).J^x$.
corriente: $J'^1=\partial X^1/\partial x^i\ J^i = \partial(X)/\partial x.J^x= ch(cT/X_H).J^x$.

Para el caso de la grilla de cargas 'q' en caída libre, representamos en un diagrama de espaciotiempo las trayectorias de las cargas: son líneas verticales, están en reposo en en espacio Minkowski.





En Σ (Minkowski)→ ρ=uniforme en el espacio, constante en el tiempo y $\vec{J}$=0 (no hay corriente).
La conservación de la carga se puede visualizar haciendo "zoom" en un intervalo de la carta Rindler, comprendido entre las rectas tiempo=T, T+ΔT y las hipérbolas X, X+ΔX.



El conteo de líneas no deja lugar a dudas sobre la conservación.
Que el flujo superior sea mayor que el inferior es indicativo de que la densidad de carga en tiempo=T+dT es superior a la densidad en tiempo=T, $\partial\rho'/\partial T>0$.
Que el flujo derecho supere al izquierdo es evidencia de una divergencia espacial negativa.
Sin embargo, la transformación jacobiana para pasar de Σ(Minkowski) a Σ'(Rindler) da:

carga: $c\rho'=J'^{0}=\partial X^0/\partial x^i.J^i = \partial(cT)/\partial ct.J^o= X_H/X.ch(cT/X_H).c\rho.$

corriente: $J'^{X}=J'^{1}=\partial X^1/\partial x^i.J^i = \partial(X)/\partial ct.\ c\rho = -sh(cT/X_H).c\rho.$

J'^{X} varía con el tiempo 'T' pero es uniforme en el espacio 'X'.
Su divergencia espacial correcta no es $\partial J'^{X}/\partial X$ sino $1/X.\ \partial(X.J'^{X})/\partial X$.
Multiplicar por 'X' antes de derivar contempla el hecho de que los arcos de hipérbola de extensión dT "capturan" más líneas cuanto mayor es su valor de 'X'. Igual que en coordenadas cilíndricas los arcos circulares de extensión dφ tienen tamaño proporcional al radio 'r'.

9.3.3 Fuerza de Lorentz:

Una de las ventajas de "*inventar*" curvatura es que partimos de leyes físicas válidas: las que se cumplen en coordenadas cartesianas del espacio Minkowski. Luego al pasar a coordenadas Rindler tendremos leyes válidas, solo será cuestión de interpretar adecuadamente los casilleros de los cuadrivectores y tensores en el nuevo sistema de referencia.
Por ejemplo, el Lagrangeano de una partícula cargada tiene dos contribuciones: una por el tiempo propio y otra por la interacción con los potenciales electromagnéticos. Ambas contribuciones son invariantes y resisten un cambio a coordenadas Rindler.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\tau + \mathcal{L}_q$$

$$\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{-\eta_{ij}U^iU^j/c^2} + q.A_j.U^j$$

$$P_i=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^i = m_o.U_i + q.A_i$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange dicen $dP_i/d\tau=\partial\mathcal{L}/\partial x^i$.
Los cálculos ya los hicimos en 5.5 y conducían a:

$m_o.dU_i/d\tau = q.F_{ij}U^j$ →elevamos índice
$m_o.dU^i/d\tau = q.F^i{}_jU^j$
$m_o.dU^i/d\tau = q.F^i{}_jU^j$ →pasamos a Rindler
$m_o.d(\partial x^i/\partial X^\alpha U^\alpha)/d\tau = q.F^i{}_jU^j$ →derivada del producto
$m_o.\partial x^i/\partial X^\alpha.dU^\alpha/d\tau + m_o.U^\alpha.d(\partial x^i/\partial X^\alpha)/d\tau = q.F^i{}_jU^j$ →derivada direccional
$m_o.\partial x^i/\partial X^\alpha.dU^\alpha/d\tau + m_o.U^\alpha.U^\lambda\partial_\lambda(\partial x^i/\partial X^\alpha) = q.F^i{}_jU^j$
$m_o.\partial x^i/\partial X^\alpha.dU^\alpha/d\tau + m_o.U^\alpha.U^\lambda(\partial^2 x^i/\partial X^\lambda/\partial X^\alpha) = q.F^i{}_jU^j$ →producto por $\partial X^\sigma/\partial x^i$, suma en i.
$m_o.\partial X^\sigma/\partial x^i.\partial x^i/\partial X^\alpha.dU^\alpha/d\tau + m_o.U^\alpha.U^\lambda.\partial X^\sigma/\partial x^i(\partial^2 x^i/\partial X^\lambda/\partial X^\alpha) = q.\partial X^\sigma/\partial x^i.F^i{}_jU^j$
$m_o.\partial X^\sigma/\partial x^i.\partial x^i/\partial X^\alpha.dU^\alpha/d\tau + m_o.U^\alpha.U^\lambda.\partial X^\sigma/\partial x^i(\partial^2 x^i/\partial X^\lambda/\partial X^\alpha) = q.\partial X^\sigma/\partial x^i.F^i{}_jU^j$

$m_o.\delta^\sigma_\alpha.dU^\alpha/d\tau + m_o.U^\alpha.U^\lambda.\Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} = q.\partial X^\sigma/\partial x^i.F^i_j U^j$

$m_o.dU^\sigma/d\tau + m_o.\Gamma^\sigma_{\lambda\alpha}.U^\alpha.U^\lambda = q.\partial X^\sigma/\partial x^i.F^i_j U^j$ →convertimos U^j a Rindler

$m_o.dU^\sigma/d\tau + m_o.\Gamma^\sigma_{\lambda\alpha}.U^\alpha.U^\lambda = q.\partial X^\sigma/\partial x^i.F^i_j \partial x^j/\partial X^\alpha.U^\alpha$

$m_o.dU^\sigma/d\tau + m_o.\Gamma^\sigma_{\lambda\alpha}.U^\alpha.U^\lambda = q.\partial X^\sigma/\partial x^i.F^i_j.\partial x^j/\partial X^\alpha.U^\alpha$

Reconocemos que aparece el tensor electromagnético $F^\sigma_\alpha = \partial X^\sigma/\partial x^i.F^i_j.\partial x^j/\partial X^\alpha$ en el nuevo referencial, convertido según las reglas esperadas de transformación tensorial.

$m_o.(dU^\sigma/d\tau + \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha}.U^\alpha.U^\lambda) = q.F^\sigma_\alpha.U^\alpha$

$m_o.(dU^\sigma/d\tau + \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha}.U^\alpha.U^\lambda) = q.F^\sigma_\alpha.U^\alpha$

La parte izquierda, que en Minkowski era $dU^i/d\tau$, ahora se convirtió en $DU^\sigma/D\tau$.
La derivada coordenada $d/d\tau$ se transformó en derivada covariante $D/D\tau$.

La parte derecha modela las fuerzas electromagnéticas.
En particular, los casilleros con $\alpha=0$ son los relevantes para cuando la partícula está en reposo y experimenta solo fuerza eléctrica.
Haremos en coordenadas Rindler cálculos similares a los de las coordenadas cilíndricas para obtener el tensor de campo electromagnético. Comenzamos por su forma covariante: $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$.
A_α es la componente covariante del cuadri-potencial, de acuerdo con la regla $A_\alpha = g_{\alpha\mu} A^\mu$.

Podemos ver gráficamente el producto matricial:

				ct	Φ/c	$=A^0$
				x	A[X]	$=A^1$
				y	A[Y]	$=A^2$
				z	A[Z]	$=A^3$
$g_{\alpha\beta}$	cT	X	Y	Z		
cT	$-(X/X_H)^2$	0	0	0	$-(X/X_H)^2.\Phi/c$	$=A_0$
X	0	1	0	0	A[X]	$=A_1$
Y	0	0	1	0	A[Y]	$=A_2$
Z	0	0	0	1	A[Z]	$=A_3$

El tensor métrico tiene la submatriz identidad 3x3 en su parte espacial, y un coeficiente diferente de -1 en su parte temporal.
El producto matricial necesario para bajar índices afecta solamente a la componente temporal.

<u>Componentes magnéticas</u>:
Veamos por ejemplo el componente 1-2 del tensor de campo:

$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$

$F_{12} = \partial_X A[y] - \partial_Y A[x]$

Si conservamos la definición clásica $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$, lo que nos queda es: $F_{12} = B[Z]$

Por permutación cíclica de índices tenemos también: $F_{23} = B[X]$ y $F_{31} = B[Y]$
Conclusión: Las componentes del campo magnético aparecen *puras* dentro del tensor de campo, igual que en coordenadas cartesianas.

<u>Componentes eléctricas</u>:
Veamos ahora el componente $F_{10} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1$.

$F_{10} = \partial_X[-(X/X_H)^2.\Phi/c] - \partial_{cT} A[X]$

$F_{10} = -1/c.(\partial_X(X^2/X_H^2.\Phi) + \partial_T A[X])$

Para las restantes coordenadas espaciales:

$F_{20} = -1/c.(\partial_Y(X^2/X_H^2.\Phi) + \partial_T A[Y])$

$F_{30} = -1/c.(\partial_Z(X^2/X_H^2.\Phi) + \partial_T A[Z])$

Aquí tendría que aparecer la información eléctrica $F_{10} = E[X]/c$ (a lo sumo con algún factor de escala).
Porque este casillero del tensor es el que va a producir una fuerza por unidad de carga.

Pero entonces ya no vale la definición clásica $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial_T \vec{A}$.
Esto es algo a lo que debemos acostumbrarnos: el campo eléctrico por si solo no tiene identidad propia en Relatividad General, porque es un vector 3D que no forma parte de ningún cuadrivector relativista.
Tampoco el campo magnético aislado tiene identidad propia; solo juntos forman una entidad significativa que es el campo electromagnético, descrito por un tensor 4x4.

En condiciones de gravedad débil, podemos encontrar algo que se comporta bastante como un campo eléctrico clásico.
La propuesta de modificación es $\vec{E} = -\nabla(X^2/X_H^2.\Phi) - \partial_T \vec{A}$ Ec(9.3.3).
Por raro que parezca, mantenemos la ley de Faraday clásica porque al tomar rotacional a ambos miembros desaparece el término de gradiente y queda $\nabla\wedge\vec{E} = -\partial_T \nabla\wedge\vec{A}$

Con esta propuesta todas las componentes del tensor de campo (tanto las eléctricas como las magnéticas) quedan puras dentro del tensor covariante.
Y la fuerza de Lorentz queda igual que la clásica en coordenadas cartesianas.

$[F_{\alpha\beta}]=$

[00	-E[X]/c	-E[Y]/c	-E[Z]/c]
[+E[X]/c	00	+B[Z]	-B[Y]]
[+E[Y]/c	-B[Z]	00	+B[X]]
[+E[Z]/c	+B[Y]	-B[X]	00]

Fuerza covariante es $F_\alpha = q.F_{\alpha\beta}.U^\beta = \dot{T}.q.[\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}]$ (en la dirección de cada coordenada X^α).
Al pasar a la versión contravariante, $F^\alpha = g^{\alpha\alpha}.F_\alpha$, y por ser $g^{ii}=1$ en Rindler nos queda la misma expresión que en Relatividad Especial. (El $\dot{T}$ es el factor gamma γ).
Para las ecuaciones de Maxwell precisamos el tensor electromagnético de índices elevados.

9.3.4 Tensor de campo contravariante:

Repetimos los pasos realizados para la fuerza de Lorentz. Partimos de una ley válida en las coordenadas Minkowski, y ejecutamos los cambios de variable para pasar de Σ a Σ'. Nos quedará una ley válida y buscaremos interpretar el resultado.
En el capítulo 5.5 formulábamos las ecuaciones de Maxwell de la Relatividad Especial: $\partial_j(F^{jk}) = -\mu_o.J^k$
Convertimos a Rindler la derivada, por regla de la cadena:

$\partial_j(F^{jk}) = \partial X^\alpha/\partial x^j.\partial_\alpha(F^{jk})$
$= \partial X^\alpha/\partial x^j.\partial_\alpha(F^{jk})$ →convertimos a Rindler el tensor
$= \partial X^\alpha/\partial x^j.\partial_\alpha(\partial x^j/\partial X^\mu F^{\mu\beta}\partial x^k/\partial X^\beta)$ →derivada del producto
$= \partial X^\alpha/\partial x^j.\partial_\alpha(\partial x^j/\partial X^\mu)F^{\mu\beta}\partial x^k/\partial X^\beta + \partial X^\alpha/\partial x^j.\partial x^j/\partial X^\mu(\partial_\alpha F^{\mu\beta})\partial x^k/\partial X^\beta + \partial X^\alpha/\partial x^j.\partial x^j/\partial X^\mu F^{\mu\beta}\partial_\alpha(\partial x^k/\partial X^\beta)$
$= \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\beta}\partial x^k/\partial X^\beta + \delta^\alpha{}_\mu(\partial_\alpha F^{\mu\beta})\partial x^k/\partial X^\beta + \delta^\alpha{}_\mu F^{\mu\beta}\partial_\alpha(\partial x^k/\partial X^\beta)$
$= \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\beta}\partial x^k/\partial X^\beta + (\partial_\alpha F^{\alpha\beta})\partial x^k/\partial X^\beta + F^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial x^k/\partial X^\beta)$

$-\mu_o.J^k = \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\beta}\partial x^k/\partial X^\beta + (\partial_\alpha F^{\alpha\beta})\partial x^k/\partial X^\beta + F^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial x^k/\partial X^\beta)$
$-\mu_o.J^k.\partial X^\sigma/\partial x^k = \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\beta}\partial x^k/\partial X^\beta.\partial X^\sigma/\partial x^k + (\partial_\alpha F^{\alpha\beta})\partial x^k/\partial X^\beta.\partial X^\sigma/\partial x^k + F^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial x^k/\partial X^\beta).\partial X^\sigma/\partial x^k$
$-\mu_o.J^k.\partial X^\sigma/\partial x^k = \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\beta}\partial x^k/\partial X^\beta.\partial X^\sigma/\partial x^k + (\partial_\alpha F^{\alpha\beta})\partial x^k/\partial X^\beta.\partial X^\sigma/\partial x^k + F^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial x^k/\partial X^\beta).\partial X^\sigma/\partial x^k$
$-\mu_o.J^\sigma = \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\beta}\delta^\sigma{}_\beta + (\partial_\alpha F^{\alpha\beta})\delta^\sigma{}_\beta + F^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}$
$-\mu_o.J^\sigma = \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\sigma} + \partial_\alpha F^{\alpha\sigma} + F^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}$
$-\mu_o.J^\sigma = \partial_\alpha F^{\alpha\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$

Esta suma de 3 términos del lado derecho se parece mucho a la fórmula del capítulo 8.4.6 para la derivada covariante de un tensor de 2 índices.

$\nabla_\lambda F^{\alpha\sigma} = \partial_\lambda F^{\alpha\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}F^{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\beta}F^{\alpha\beta}$

Aquí estamos frente a una contracción λ=α (la divergencia es una contracción del gradiente).

$\nabla_\alpha F^{\alpha\sigma} = \partial_\alpha F^{\alpha\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}F^{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$

Entonces las ecuaciones de Maxwell del espaciotiempo Minkowski, al pasar a Rindler, se convierten en:

$$-\mu_o.J^\sigma = \nabla_\alpha F^{\alpha\sigma}$$

Nuevamente queda una forma muy parecida, con el operador ∇_α tomando el lugar de ∂_α.

Veamos entonces cómo queda nuestro tensor electromagnético de índices elevados en el espacio Rindler.
Debemos partir de la forma covariante y realizar un doble producto matricial, una vez a la izquierda y otra vez a la derecha: $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda} F_{\lambda\mu} g^{\mu\beta}$.
Los cálculos se pueden simplificar ordenando las matrices por bloques.
Se observa que la parte espacial (o sea magnética) se mantiene intacta.
Los cambios ocurren en la parte temporal (eléctrica), que aparece cambiada de signo y con un factor de escala $k= -g^{00}=(X_H/X)^2$. El resultado es:

$[F^{\alpha\beta}]=$

[00	k.E[X]/c	k.E[Y]/c	k.E[Z]/c]
[-k.E[X]/c	00	+B[Z]	-B[Y]]
[-k.E[Y]/c	-B[Z]	00	+B[X]]
[-k.E[Z]/c	+B[Y]	-B[X]	00]

Teniendo ambas versiones del tensor podemos calcular el invariante $F_{\alpha\beta}.F^{\alpha\beta}$. Esta especie de "norma" del tensor de campo (o traza del tensor producto) surge de una doble contracción de índices.
En Relatividad Especial valía $2*(B^2 – E^2/c^2)$ y admitía la siguiente interpretación: si en un referencial Σ tenemos una onda electromagnética caracterizada por E=B.c, al pasar a Σ' por transformación de Lorentz vamos a tener también una onda con E'=B'.c, y la cantidad $B'^2–E'^2/c^2$ también va a ser nula.
¿Cómo se modifica esto en Relatividad General?
La parte magnética no varía porque las componentes de campo aparecen iguales en $F_{\alpha\beta}$ y en su $F^{\alpha\beta}$ correspondiente, sin factores de escala. Dando como resultado $2.B^2$.
La parte eléctrica sí varía. El tensor $F_{\alpha\beta}$ aporta un signo negativo (factor=-1) y el $F^{\alpha\beta}$ aporta $(X_H/X)^2$, dando como resultado $–2.(X_H/X)^2.E^2/c^2$.
El invariante es entonces $F_{\alpha\beta}.F^{\alpha\beta}=2.(B^2–E^2/v_c^2)$
siendo $v_c=c.(X/X_H)$ la velocidad local de la luz alterada por gravedad, la misma obtenida en 6.6.

Reflexión: En el espacio Minkowski, este invariante vale $2.(B^2–E^2/c^2)$. Si es un invariante, ¿cómo puede ser que cambie su valor al movernos al espacio Rindler? Debería resistir el paso de Σ a Σ'.
Lo que parece una incompatibilidad en realidad es un problema de notación: ¿qué es lo que llamamos 'E'? Aquí le pusimos nombre 'E' a las casillas espacio-temporales de la forma covariante del tensor de campo, las responsables de la fuerza por unidad de carga para partículas cargadas. Pero no son los mismos valores que aparecen en las casillas espaciotemporales del tensor contravariante, de donde vamos a tomar la divergencia para relacionarla con la densidad de carga.

9.3.5 Ecuaciones de Maxwell:

Para las divergencias precisamos el determinante de Rindler $g= –(X/X_H)^2$. Y el factor raíz $\sqrt{-g} =X/X_H$.

Con paciencia vamos recorriendo cada columna del tensor de campo y tomamos su divergencia.

Columna-0)

$–\mu_0.J^0 =\nabla_\alpha F^{\alpha 0}$ →reconocemos $J^0=c.\rho$
$–\mu_0.c.\rho =\nabla_\alpha F^{\alpha 0}$ →divergencia covariante
$–\mu_0.c.\rho =1/\sqrt{-g} .\partial_\alpha(\sqrt{-g} .F^{\alpha 0})$ →sustituimos $g = –(X/X_H)^2$
$–\mu_0.c.\rho =X_H/X.\partial_\alpha(X/X_H.F^{\alpha 0})$ →multiplicamos por X/X_H
$–\mu_0.c.\rho.X/X_H = \partial_\alpha(X/X_H.F^{\alpha 0})$ →expandimos suma de $\alpha=0$ a $\alpha=3$
$–\mu_0.c.\rho.X/X_H =\partial_X(X/X_H.F^{X0})+\partial_Y(X/X_H.F^{Y0})+\partial_Z(X/X_H.F^{Z0})$

Sustituimos componentes del tensor, cada uno de ellos aporta un factor $–(X_H/X)^2$

$–\mu_0.c.\rho.X/X_H =–\partial_X(X_H/X.E[X]/c) + \partial_Y(X_H/X.E[Y]/c) + \partial_Z(X_H/X.E[Z]/c)$
$\mu_0.c^2.\rho.X/X_H =\partial_X(X_H/X.E[X]) + \partial_Y(X_H/X.E[Y]) + \partial_Z(X_H/X.E[Z])$
$\rho/\epsilon_0.X/X_H =\partial_X(X_H/X.E[X]) + \partial_Y(X_H/X.E[Y]) + \partial_Z(X_H/X.E[Z])$

Debido a que la métrica Rindler presenta una parte espacial euclídea sin alteración, podemos reutilizar las notaciones clásicas para esa parte espacial. Reescribiendo:

$$\rho/\epsilon_0.X/X_H = \nabla\cdot(X_H/X.\vec{E})$$

Esto vendría a ser una versión Rindler de la ley clásica de Gauss-Coulomb.
La fórmula es *exacta*, pero no es fácil encontrarle soluciones particulares ni interpretaciones físicas.
Podemos mejorar la interpretación si nos restringimos a gravedades débiles con la coordenada X muy débilmente apartada de la referencia X_H, es decir $|X-X_H| \ll X_H$, $(X/X_H)\sim 1$
Bajo esas hipótesis de simplificación, la 'X' puede salir fuera de las derivadas y nos queda:

$$\rho/\epsilon_0.X/X_H \approx X_H/X.\nabla\cdot\vec{E}$$
$$\rho/\epsilon_0.(X/X_H)^2 \approx \nabla\cdot\vec{E}$$
$$\nabla\cdot\vec{E} \approx \rho/\epsilon$$

→ El espacio-tiempo en presencia de gravedad se comporta aproximadamente como un medio con cierto índice de refracción diferente de 1 y caracterizado por una permitividad eléctrica:

$$\epsilon \approx \epsilon_o.(-g^{00}) \approx \epsilon_o.(X_H/X)^2$$

Observamos que no hay problema de signo porque g^{00} es negativo
Observamos también que $|g_{oo}|<1$, $|g^{oo}|>1$ →la alteración apunta en el sentido de enlentecer la velocidad de propagación de la luz con $v_c<c$, ya que usualmente nos movemos en coordenadas X por debajo de X_H.

Columna-1)

$-\mu_0.J^1 = \nabla_\alpha F^{\alpha 1}$ →reconocemos $J^1=j[X]$
$-\mu_0.j[X] = \nabla_\alpha F^{\alpha 1}$ →divergencia covariante
$-\mu_0.j[X] = X_H/X.\partial_\alpha(X/X_H.F^{\alpha 1})$ →multiplicamos por X/X_H
$-\mu_0.j[X].X/X_H = \partial_\alpha(X/X_H.F^{\alpha 1})$ →expandimos suma de α=0 a α=3
$-\mu_0.j[X].X/X_H = \partial_0(X/X_H.F^{01})+\partial_2(X/X_H.F^{21})+ \partial_3(X/X_H.F^{31})$
$-\mu_0.j[X].X/X_H = 1/c.\partial_T(X/X_H.(X_H/X)^2.E[X]/c) -\partial_Y(X/X_H.B[z])+ \partial_Z(X/X_H.B[Y])$
$-\mu_0.j[X].X/X_H = 1/c^2.\partial_T(X_H/X.E[X]) -\partial_Y(X/X_H.B[z])+ \partial_Z(X/X_H.B[Y])$
$\partial_Y(X/X_H.B[z]) -\partial_Z(X/X_H.B[Y]) = \mu_0.j[X].X/X_H + 1/c^2.\partial_T(X_H/X.E[X])$

Columna-2)

Los cálculos son muy similares, hay un desplazamiento cíclico de roles X→Y, Y→Z, Z→X
$\partial_Z(X/X_H.B[X]) -\partial_X(X/X_H.B[Z]) = \mu_0.j[Y].X/X_H + 1/c^2.\partial_T(X_H/X.E[Y])$

Columna-3)

$\partial_X(X/X_H.B[Y]) -\partial_Y(X/X_H.B[X]) = \mu_0.j[Z].X/X_H + 1/c^2.\partial_T(X_H/X.E[Z])$

En notación vectorial clásica, las ecuaciones de las 3 columnas espaciales se resumen en una ley de Ampere ligeramente modificada respecto a la versión clásica en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \wedge (X/X_H.\vec{B}) = \mu_0.X/X_H.\vec{J} + 1/c^2.\partial_T(X_H/X.\vec{E})$$

Si tomamos divergencia coordenada a ambos miembros se anula la parte izquierda, y al aplicar la Ley de Gauss modificada nos queda a la derecha la ecuación de conservación de la carga en coordenadas de Rindler. $\nabla\cdot(X/X_H.\vec{J}) + (X/X_H).\partial_T\rho = 0$

La interpretación de esta Ley de Ampere se simpflifica en escenarios de gravedad débil, donde los coeficientes métricos (X/X_H) son muy cercanos a la unidad y varían poco en la región de estudio. En ese caso podemos quitarlos de los operadores de derivada:

$X/X_H.\ \nabla \wedge \vec{B} \approx \mu_0.X/X_H.\vec{J} + X_H/X/c^2.\partial_T\vec{E}$
$\nabla \wedge \vec{B} \approx \mu_0.\vec{J} + (X_H/X)^2/c^2.\partial_T\vec{E}$
$$\nabla \wedge \vec{B} \approx \mu.(\vec{J} + \epsilon.\partial_T\vec{E})$$

con $\mu\approx\mu_0$, $\epsilon\approx(X_H/X)^2\epsilon_0$, $\mu.\epsilon=1/v_c^2$, $v_c\approx c.(X/X_H)$ velocidad local de la luz afectada por gravedad

9.3.6 Ecuación de ondas electromagnéticas:

En la sección 5.6.2 llegábamos a una ecuación de ondas que involucraba los operadores de derivación con índice alto ∂^α. Haremos aparecer estos mismos operadores en las coordenadas curvilíneas genéricas, partiendo de la definición del tensor de campo contravariante.

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda}.F_{\lambda\mu}.g^{\mu\beta}$$
$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda}.(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda).g^{\mu\beta}$$
$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda}.(\partial_\lambda A_\mu) .g^{\mu\beta} - g^{\mu\beta}\partial_\mu(A_\lambda).g^{\alpha\lambda}$$
$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A_\mu.g^{\mu\beta} - \partial^\beta(A_\lambda).g^{\alpha\lambda}$$
$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A_\mu.g^{\mu\beta} - \partial^\beta(A_\lambda).g^{\alpha\lambda} \quad \rightarrow \text{completamos derivadas de productos}$$
$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha(A_\mu.g^{\mu\beta}) - A_\mu.\partial^\alpha g^{\mu\beta} - \partial^\beta(A_\lambda g^{\alpha\lambda}) + A_\lambda\partial^\beta g^{\alpha\lambda}$$
$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha(A^\beta) - A_\mu.\partial^\alpha g^{\mu\beta} - \partial^\beta(A^\alpha) + A_\lambda\partial^\beta g^{\alpha\lambda}$$
$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha - A_\mu.\partial^\alpha g^{\mu\beta} + A_\lambda\partial^\beta g^{\alpha\lambda}$$

Los términos resaltados en amarillo son los dominantes para los escenarios de campos débiles que más nos interesan, especialmente si están relacionados con ondas electromagnéticas. Lo que estamos exigiendo es que las variaciones de la métrica sean muy poco significativas en el intervalo espacial correspondiente a una longitud de onda y en el intervalo temporal correspondiente al período de oscilación de la onda.

- ∂_x, cuando opera sobre componentes Ay, vale ≈1/m para ondas de radio, 1/mm para microondas o 1/μm para ondas de luz. En cambio, cuando opera sobre la métrica de escala planetaria (que es la que estamos simulando con aceleración de Rindler) vale ≈1/km o menor, según cuántos kilómetros o miles de kilómetros precise la gravedad para variar.
- Por otro lado, la métrica es expresable como la base de Minkowski + una perturbación leve: $g_{oo}=\eta_{oo} + h_{oo}$, y la parte métrica que varía es solo la perturbación $|h_{oo}| \ll |g_{oo}|$.

Con estas simplificaciones, el tensor de campo contravariante se aproxima como $F^{\alpha\beta} \approx \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$.
La derivada covariante se aproxima por la derivada coordenada, bajo la hipótesis de que los factores (X/X_H) pueden salir libremente fuera de los operadores de derivación.
Las ecuaciones de Maxwell se aproximan como $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \approx -\mu_o.J^\beta$
En regiones libres de cargas y de corrientes, tenemos la ecuación de ondas que describe la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío.

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$$
$$\partial_\alpha [\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha] = 0$$
$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha = 0$$

En general los operadores ∂_α y ∂^β no conmutan; pero dentro de las restricciones de "variaciones suaves" que venimos manejando en esta sección, los coeficientes métricos pueden entrar o salir libremente de las operaciones de derivación. Entonces sí valdría la conmutación, lo que significa que podríamos invertir el orden de derivación igual que hicimos en Relatividad Especial.

$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha \approx 0$$
$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha \approx 0$$
$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha = 0$$

$\partial_\alpha A^\alpha$ desaparece si elegimos la condición de calibre de Lorenz $\partial_\alpha A^\alpha$.
Quedando entonces la ecuación de ondas de vacío: $\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta \approx 0$

$\partial_\alpha\partial^\alpha = []^2$ es el operador de ondas o d'Alembertiano.
$\partial^0 = g^{oo}.\partial_{cT}$ $\partial^i = g^{ii}.\partial_i$ para i=1,2,3
Para el caso de la métrica Rindler, $g^{oo}= -(X_H/X)^2$ y $g^{ii}=1$, de cualquier manera anotamos g^{ii} para prever que pueda aparecer en otras métricas (por ejemplo, en presencia de masas generadoras de gravedad).

$$\rightarrow \partial_\alpha\partial^\alpha = g^{ii}\nabla^2 + g^{oo}/c^2.\partial_T{}^2$$

Vemos similitudes y diferencias con la ecuación de ondas clásica.
En lugar del operador **d'Alembertiano** clásico ($\nabla^2 - \partial_{cT}^2$) nos aparece una versión modificada por coeficientes métricos.

Las soluciones siguen basándose en funciones con una variación espacio-temporal como $e^{i.(\omega.T - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, en los escenarios en que tales variaciones son mucho más intensas que las eventuales variaciones de la métrica en el entorno de varias longitudes de onda o períodos (hipótesis que sostuvimos cada vez que ignorábamos las derivadas de la métrica).

Para estas variaciones espacio-temporales, las asociaciones son:

$\nabla \rightarrow -i.\vec{k}$, $\nabla^2 \rightarrow -k^2$
$\partial_T \rightarrow i.\omega$, $\partial_{cT}^2 \rightarrow -\omega^2/c^2$

La ecuación diferencial se convierte en algebraica si se cumple cierta relación entre los parámetros ω,k:

$g^{ii}.k^2 + g^{00}.\omega^2/c^2 = 0$
$g^{ii}.k^2 = -g^{00}.\omega^2/c^2$
$g^{ii}.c^2 = -g^{00}.\omega^2/k^2$ $\rightarrow \omega/k = \pm\, c.\sqrt{-g^{ii}/g^{00}}$

ω/k es la velocidad de fase con la que se propagan las ondas electromagnéticas.

Aquí se unen de una manera interesante dos enfoques:

- los "rayos de luz" vistos como trayectorias de métrica nula
  $(dS)^2 = -(c.d\tau)^2 = g_{oo}.(c.dT)^2 + g_{ii}.(dX^2+dY^2+dZ^2)$
- la luz como onda electromagnética solución de las ecuaciones de Maxwell en espacio-tiempo curvo.

Advertimos que nuestra propuesta de solución $e^{i.(\omega.T - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ corresponde a lo que se llama "onda armónica plana" con propagación rectilínea, solo puede mantener su validez en un entorno de unas cuantas longitudes de onda donde las variaciones de la métrica son ignorables.
Al analizar trayectos más extensos empieza a ser relevante el hecho de que una misma 'ω' y un mismo vector $\vec{k}$ no pueden describir a la onda a nivel global porque las perturbaciones métricas varían con la posición. Ahí es donde tiene sentido analizar la curvatura de los trayectos luminosos y el efecto Doppler (corrimiento en frecuencia), entre otros fenómenos.

Reflexión: Al inicio de este capítulo 9 anunciábamos que el Electromagnetismo nos podía servir de referencia sobre la forma que adquieren las leyes físicas al movernos en espaciotiempos curvos.
Esta modificación del operador d'Alembertiano es un resultado interesante que trasciende el Electromagnetismo: todas las ecuaciones que en Física Clásica involucraban $\nabla^2 - \partial_{ct}^2$ deberán revisarse teniendo en cuenta las distorsiones métricas, y veremos que una de ellas es precisamente *la ecuación que gobierna la propia generación de perturbaciones:* $\nabla^2\Phi_g = 4\pi G\rho_m$.

9.4 Principio de Acoplamiento Mínimo.

Podemos extender a un escenario gravitatorio los recursos utilizados en 9.3 para fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell en coordenadas curvilíneas.
Nos apoyamos en un principio físico llamado de "Acople Mínimo", que dentro de sus conceptos manejados contiene la idea de que *una ley física válida en un espacio-tiempo plano puede extenderse a un espacio-tiempo curvo si se sustituye $\eta_{\alpha\beta}$ por $g_{\alpha\beta}$ y ∂_α por ∇_α*. Se interpretaría como la forma más simple y menos invasiva en que la gravedad puede "acoplarse" o vincularse con la materia y los campos electromagnéticos.

Advertencia: este principio no es más que una recomendación general o "*receta*" (en inglés "*prescription"*) sobre cómo construir leyes candidatas a ser válidas. Las leyes así construidas deberán en cada caso concreto contrastarse con otras leyes y con experimentos para comprobar su validez.
A modo de ejemplo: una ley que involucre una derivada segunda en 2 coordenadas $\partial_\alpha\partial_\beta$ no es fácilmente extensible a un espacio-tiempo curvo porque las derivadas covariantes segundas no conmutan: no está claro si debe utilizarse $\nabla_\alpha\nabla_\beta$, $\nabla_\beta\nabla_\alpha$ o una combinación entre ambas del estilo de $\frac{1}{2}.(\nabla_\alpha\nabla_\beta + \nabla_\beta\nabla_\alpha)$.

En el caso del Electromagnetismo, este principio recién enunciado sugiere que debemos revisar la definición de la magnitud fundamental del Electromagnetismo, que es el tensor de campo.

- $\partial_\alpha A_\beta$ no es bienvariante frente a un cambio de coordenadas, no se transforma con los productos matriciales por los jacobianos.
- Lo mismo vale para el otro término $\partial_\beta A_\alpha$

Las magnitudes genuinamente covariantes que resisten cambios de variable arbitrarios son $\nabla_\alpha A_\beta$ y $\nabla_\beta A_\alpha$, lo que implica que deberíamos pensar en actualizar la definición:
NUEVO TENSOR DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO: $F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$
Operamos a partir de las fórmulas de derivada covariante presentadas en el capítulo 8.4.6:

$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$
$F_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha A_\beta - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} A_\lambda) - (\partial_\beta A_\alpha - \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} A_\lambda)$
$F_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha A_\beta - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} A_\lambda) - (\partial_\beta A_\alpha - \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} A_\lambda)$ →reagrupamos
$F_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - (\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} A_\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} A_\lambda)$ →aplicamos simetría de los símbolos de Christoffel
$F_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - (0)$
$F_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$

Comprobamos que nuestro "nuevo" tensor resulta igual al antiguo que fue introducido en Relatividad Especial, capítulo 5.5. Aquel ya era bien comportado frente a transformaciones, a pesar de que fue definido sin derivada covariante. Podemos decir que tuvimos *suerte* gracias al hecho de que la definición original implicaba una resta de términos simétricos. Si ese no fuera el caso deberíamos actualizar la definición y corregir todos los resultados de la sección 9.3.

El Principio de Mínimo Acople dicta que las ecuaciones de Maxwell deben modificarse como:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_o . J^\beta$$

Fue lo que hicimos en la sección anterior 9.3 utilizando la fórmula del determinante para la divergencia:
$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 1/\sqrt{-g}.\partial_\alpha(\sqrt{-g}.F^{\alpha\beta})$

Advertencia: También tuvimos suerte en otro aspecto: en coordenadas curvilíneas ***la divergencia covariante de un tensor no es un vector formado por la divergencia de cada una de sus columnas***; algo similar a lo que ocurre con el laplaciano de un vector que solamente en coordenadas rectangulares admite la simplificación $\nabla^2(P\hat{x}+Q\hat{y}+R\hat{z}) = \hat{x}\nabla^2P+\hat{y}\nabla^2Q+\hat{z}\nabla^2R$. Está faltando un término basado en los símbolos de Christoffel. El hecho de que podamos aplicar esta simplificación en las ecuaciones de Maxwell a pesar de la advertencia requiere una demostración formal que no es nada trivial y que queda planteada como ejercicio.
Sugerencia: utilizar las fórmulas 8.4.6 ($\nabla_\alpha F^{\alpha\sigma} = \partial_\alpha(F^{\alpha\sigma}) + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}.F^{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}.F^{\alpha\mu}$), las propiedades de simetría de los coeficientes de Christoffel y la propiedad de antisimetría del tensor de campo.

Finalmente, el determinante del tensor métrico aparece en los elementos de volumen y ayuda a expresar las ecuaciones de Maxwell en su forma integral: $\iiint_{Vol4} Func(x,y,z,t).\sqrt{-g}.dx.dy.dz.dt$
Comenzamos con un ejemplo de aplicación de este Principio de Mínimo Acople, mostrando un resultado que ya obtuvimos por otra vía.
Luego continuaremos con dos nuevas situaciones en donde se aplica el principio.

9.4.1 Fuerza y aceleración:

En la formulación lagrangeana de la Mecánica Relativista del capítulo 5.5 vimos:

$F^\alpha = m_o.dU^\alpha/d\tau$

F^α=cuadrifuerza en versión contravariante

U^α=cuadrivelocidad

Aplicando la derivada direccional en la dirección del movimiento, sustituimos $d/d\tau = U^\beta \partial_\beta$

$F^\alpha = m_o.U^\beta \partial_\beta U^\alpha$

Al pasar a un espaciotiempo curvo, la generalización manda sustituir $\partial_\beta \rightarrow \nabla_\beta$

$F^\alpha = m_o.U^\beta \nabla_\beta U^\alpha$

$F^\alpha = m_o.DU^\alpha/D\tau$

Como consecuencia de este cambio, $d/d\tau$ se convierte en $D/D\tau$.
Llegamos a la ecuación geodésica que ya habíamos formulado en el capítulo 8.2.5, antes de enunciar ni aplicar el principio de mínimo acople.
Llegaríamos a esta misma formulación si nos mantenemos en los espaciotiempos planos de la Relatividad Especial pero describimos las fuerzas y momentos en coordenadas curvilíneas.

Lo que nos invita a reflexionar: Podemos repasar varios experimentos, ejemplos y ejercicios descritos en los capítulos iniciales de Relatividad Especial. Aquel espaciotiempo era plano porque no contemplábamos todavía las distorsiones de las masas. Pero si ahora reformulamos los experimentos en coordenadas curvilíneas, se va a cumplir $g_{\alpha\beta} \neq \eta_{\alpha\beta}$ y $\nabla_\alpha \neq \partial_\alpha$. ¿Valdrán las mismas ecuaciones?

9.4.2 Derivada covariante de la métrica:

Enunciamos una relación simple válida en los espacios planos de la Relatividad Especial: $\partial_\alpha \eta_{\lambda\mu} = 0$
Significa que la derivada parcial en cualquier coordenada X^α es nula para todos los componentes del tensor métrico de Minkowski $\eta_{\lambda\mu}$ $\forall\lambda,\forall\mu$. Parece una trivialidad.
La receta de Mínimo Acople ($\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$ $\eta_{\lambda\mu} \rightarrow g_{\lambda\mu}$) sugiere que esto se puede extender a las geometrías curvas de la Relatividad General para dar $\nabla_\alpha g_{\lambda\mu} = 0$, lo que se llama "compatibilidad métrica". No es nada evidente a primera vista; para demostrar que se cumple es necesario hacer algunos cálculos.

Para hacernos una idea del significado de ese resultado, lo primero es analizar la situación en un referencial de caída libre localmente inercial. Si está bien elegido debe capturar toda la "esencia" de la gravedad; en particular, todas las derivadas primeras de todos los coeficientes métricos deben anularse ($\partial_\alpha g_{\lambda\mu} \sim 0$) en el punto elegido, pero no las derivadas segundas que ponen en evidencia el carácter curvo del espaciotiempo.

Lo próximo es aplicar la fórmula vista en 8.4.6 para la derivada covariante de un tensor de 2 índices.

$\nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}) = \partial_\alpha g_{\lambda\mu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda} .g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} .g_{\lambda\sigma}$

Los símbolos de Christoffel de 2da especie, al estar multiplicados por la métrica, se convierten en símbolos de 1ra especie mediante una "bajada de índices".
Luego los expandimos de acuerdo con su fórmula de 8.2.5:

$\nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}) = \partial_\alpha g_{\lambda\mu} - g_{\sigma\mu}.\Gamma^\sigma_{\alpha\lambda} - g_{\lambda\sigma}.\Gamma^\sigma_{\alpha\mu}$

$\nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}) = \partial_\alpha g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\mu,\alpha\lambda} - \Gamma_{\lambda,\alpha\mu}$

$\nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}) = \partial_\alpha g_{\lambda\mu} - ½.[\partial_\alpha g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\mu}]$

$\nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}) = \partial_\alpha\, g_{\lambda\mu} - ½.[\partial_\alpha g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha g_{\mu\lambda} + \partial_\mu\, g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\mu}]$ →cancelamos repetidos

$\nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}) = \partial_\alpha\, g_{\lambda\mu} - ½.[\partial_\alpha g_{\mu\lambda} + \partial_\alpha g_{\mu\lambda}]$

$\nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}) = \partial_\alpha\, g_{\lambda\mu} - [\partial_\alpha g_{\mu\lambda}]$ → $\nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}) = 0$

Ejercicio: Demostrar que el transporte paralelo conserva ángulos y distancias.
Principio de demostración: Partir de 2 vectores $\vec{A}$ $\vec{B}$ y transportarlos paralelamente por un segmento dX^α.
Calcular la derivada del producto escalar: $dX^\alpha\, \nabla_\alpha(g_{\lambda\mu}\, A^\lambda\, B^\mu)$

9.4.3 Identidad de Bianchi:

El Principio de Equivalencia indica que si nos dejamos caer en caída libre suprimimos la sensación de gravedad (al menos localmente y durante un breve tiempo). Matemáticamente esto significa que:

- En el referencial de caída libre los símbolos de Christoffel son nulos, *aunque no necesariamente sus derivadas*.
- la métrica es esencialmente la de Minkowski, con perturbación leve y creciente a medida que nos alejamos.
- la derivada covariante se aproxima por la derivada coordenada.

Algunas magnitudes *temibles* se simplifican, por ejemplo las componentes del tensor de Riemann ya no tienen el producto de coeficientes de Christoffel:

$$R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$$

En este referencial especial nos podemos *animar* a tomar derivadas de este tensor, lo que sería muy complicado en el referencial original.

$$\nabla_\sigma R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial^2{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \partial^2{}_{\beta\sigma} \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$$

Ejercicio: Demostrar en este referencial simplificado la llamada 2da Identidad de Bianchi: (se llama Segunda Identidad para diferenciarla de la Primera Identidad presentada en 5.6.5)

$$\nabla_\sigma R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} + \nabla_\beta R^\lambda{}_{\mu\sigma\alpha} + \nabla_\alpha R^\lambda{}_{\mu\beta\sigma} = 0$$

A partir de esta ecuación y luego de contraer ciertos índices se puede encontrar una expresión interesante para la divergencia del tensor de Ricci; un resultado necesario para el Capítulo 11 “Ecuaciones de Campo”.

9.4.4 Simetrías del tensor de Riemann:

Este objeto imponente con 256 componentes no debería *asustar* tanto si encontramos y aprendemos a explotar la amplia redundancia que hay entre los distintos componentes.
Por ejemplo, $R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} = -R^\lambda{}_{\mu\beta\alpha}$ se ve en forma inmediata al intercambiar los roles α y β en la definición.

Sin embargo hay otras simetrías menos evidentes que se pueden demostrar en las coordenadas inerciales del referencial de caída libre, y luego extrapolar a un sistema de coordenadas genérico.
Partimos de la aproximación en un entorno del punto de análisis:

$$R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$$

Multiplicamos por $g_{\sigma\lambda}$ para bajar un índice:

$$g_{\sigma\lambda}.R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \approx g_{\sigma\lambda}.\partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - g_{\sigma\lambda}.\partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$$

En el entorno de análisis la métrica es esencialmente la de Minkowski $\eta_{\sigma\lambda}$ con derivadas nulas, lo que le permite entrar y salir libremente de los operadores de derivación.

$$g_{\sigma\lambda}.R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha(g_{\sigma\lambda}\, \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta}) - \partial_\beta(g_{\sigma\lambda}.\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}).$$

$$R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha(\Gamma_{\sigma,\mu\beta}) - \partial_\beta(\Gamma_{\sigma,\mu\alpha}).$$

Ejercicio: Expandir los símbolos de Christoffel de primera especie para demostrar:

$R_{\sigma\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\sigma\alpha\beta}$ $\quad R_{\sigma\mu\alpha\beta} = +R_{\alpha\beta\sigma\mu}$ $\quad R^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta} = -R^{\mu\lambda}{}_{\alpha\beta}$

9.5 Laplaciano "relativista".

Nos embarcamos a continuación en el proceso de calcular el laplaciano del potencial Φ_g aplicando la derivación covariante a la divergencia del campo gravitatorio, esto nos ayudará a resolver ciertos cabos sueltos que fueron generándose en capítulos previos.

9.5.1 Métrica de Rindler:

El primer cabo suelto a corregir es la "*masa aparente o ficticia*" que parece surgir en este escenario si uno razona en forma descuidada.

La métrica en las coordenadas Rindler (cT,X,Y,Z) se expresa según lo visto en la sección 6.5:

$$(dS)^2 = -(X/X_H)^2.(c.dT)^2 + (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2$$

El coeficiente temporal-temporal de la métrica es $g_{oo}= -(X/X_H)^2$, identificable como $-1-2.\Phi_g/c^2$.

En la sección 7.1.4 calculábamos su laplaciano como $\nabla^2(g_{oo})=\partial_X^2(g_{oo})+\partial_Y^2(g_{oo})+\partial_Z^2(g_{oo})= -2/X_H^2$

$\nabla^2(\Phi_g) = c^2/X_H^2 = 4.\pi.G.\rho_m$

La identificación de $\nabla^2(g_{oo})$ con la densidad de masa ρ_m está sugiriendo *la presencia de materia que llena de manera uniforme todo el espacio vacío*. Podemos aceptar que un cambio de variables acelerado cree la ilusión de gravedad sustentada por masas remotas que al verse aceleradas produzcan ese efecto. Pero cuesta aceptar que la densidad de masa causante del laplaciano esté aquí mismo, en el espacio donde estamos acelerando nuestra nave imaginaria para simular gravedad.

Esta aparente paradoja es un indicio de que *el laplaciano clásico no es la forma más precisa para medir el efecto de las masas sobre la métrica*. No debería sorprendernos tanto, ya que a lo largo de este trabajo fueron surgiendo evidencias que apuntan en este sentido.

La raíz de la confusión está en que las coordenadas Rindler *parecen* cartesianas por su parte espacial $dX^2+dY^2+dZ^2$ en la expansión métrica $(dS)^2$, lo que invita a tomar un laplaciano en forma apresurada como $\partial_X^2+\partial_Y^2+\partial_Z^2$. Pero en coordenadas curvilíneas debemos aplicar con rigor la definición de "divergencia del gradiente", usando derivación covariante. Si aplicamos bien los conceptos nos va a quedar una especie de "laplaciano relativista".

Primer paso: A partir del Lagrangeano para la métrica de Rindler, buscamos las caídas libres:

$$\mathcal{L}(cT,X,c\dot{T},\dot{X},\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(X/X_H)^2.\dot{T}^2 - \dot{X}^2/c^2} \qquad \text{(ignoramos coordenadas Y,Z)}$$

momento: $P_X = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{X} = m_o.\dot{X}$

"fuerza": $\partial\mathcal{L}/\partial X = -m_o.c^2.X/X_H^2.\dot{T}^2$

Cuando la caída libre recién comienza $\dot{X}\approx 0$, $\sqrt{\ }=1$ y $\dot{T}^2\approx X_H^2/X^2$.

La ecuación variacional queda:

$$dP_X/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial X$$
$$m_o.\ddot{X} = -m_o.c^2/X$$
$$\ddot{X} = g^X = -c^2/X$$

g^X cumple el rol de un campo gravitatorio en versión contravariante, porque aparece proporcional a la aceleración contravariante $\ddot{X}$.

Es proporcional a 1/X, guarda la misma forma que las corrientes J^X estacionarias vistas en la sección 9.3.2.

Segundo paso:

El determinante del tensor métrico es $g= -(X/X_H)^2 \rightarrow \sqrt{-g} = X/X_H$

Calculamos la divergencia (¡covariante!) del campo gravitatorio $\vec{g}$, extendiendo a 4 dimensiones las fórmulas presentadas en 9.2.1:

$$\nabla_\alpha g^\alpha = 1/\sqrt{-g}\ .\partial_\alpha(\sqrt{-g}\ .g^\alpha)$$
$$\nabla_\alpha g^\alpha = X_H/X.\partial_\alpha(X/X_H.g^\alpha) \qquad \rightarrow \text{suma en } \alpha\text{. Solo el término } \alpha=X \text{ aporta algo no nulo}$$
$$\nabla_\alpha g^\alpha = X_H/X.\partial_X(X/X_H.\ g^X)$$

$\nabla_\alpha g^\alpha = X_H/X.\partial_X(X/X_H.\ -c^2/X) = 0$

Esta es la divergencia que se debe mapear con $-4\pi G\rho_m$. Es nula en este caso, lo que significa que no hay ilusión de *masa ficticia* cuando se utilizan las ecuaciones con buen criterio.

9.5.2 Rindler linealizado:

Repetimos los argumentos para la métrica que surge del cambio de variables 7.2.1: $U/U_H=(X/X_H)^2$

$\mathcal{L}(\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(U/U_H).\dot{T}^2 - (U_H/U)\dot{U}^2/c^2 - \dot{Y}^2/c^2 - \dot{Z}^2/c^2}$

$-g_{oo}=U/U_H=1+2\Phi_g/c^2 \qquad g_{UU}=U_H/U \qquad g_{YY}=1 \qquad g_{ZZ}=1$

Ahora el potencial depende linealmente de la coordenada '*vertical*' U.

$(\partial_U^2 + \partial_Y^2 + \partial_Z^2)\Phi_g$ es exactamente nulo, consistente con la ausencia de masa ρ_m.

Pero esta suma de derivadas segundas es el laplaciano de las coordenadas cartesianas, ¿realmente es válido aplicarlo en este escenario de métrica no-cartesiana? La justificación está en que los coeficientes métricos g_{oo} y g_{UU} son inversos. El coeficiente temporal g_{oo}, a través del determinante 'g', influye sobre las divergencias espaciales incluso en escenarios estáticos en los que no hay variación temporal.

Primer paso:

Aplicamos la dinámica lagrangeana:

$P_U = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{U} = m_o.(U_H/U).\dot{U}$

$\partial\mathcal{L}/\partial U = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).(\dot{T}^2/U_H + U_H/U^2.\dot{U}^2/c^2)$

Cuando la caída libre recién comienza $\dot{U}\approx 0$ y $\dot{T}^2\approx U_H/U$.

La ecuación variacional queda:

$dP_U/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial U$

$m_o.(U_H/U).U^{\cdot\cdot} = -m_o.c^2/2.(\dot{T}^2/U_H)$

$(U_H/U).U^{\cdot\cdot} = -c^2/2/U$

$U^{\cdot\cdot} = -c^2/(2U_H)$ →Recordamos de 7.2.1 que $U_H=X_H/2$, $X_H=c^2/A_H$

$U^{\cdot\cdot} = g^U = -A_H$ = componente-U contravariante del campo gravitatorio $\vec{g}$

Curiosidad: Con estas coordenadas Rindler "linealizadas" tenemos un campo $\vec{g}$ genuinamente uniforme, mientras que en las coordenadas Rindler cuadráticas la linealización del potencial solo era una aproximación local para una pequeña región.

A_H es la aceleración Rindler, que utilizábamos para simular la 'g' terrestre en el capítulo 6.

Segundo paso:

El determinante del tensor métrico es $g=g_{oo}.g_{UU}.g_{YY}.g_{ZZ}= -(U/U_H).(U_H/U).1.1 = -1$

La divergencia covariante según fórmulas de 9.2.1 queda:

$\nabla_\alpha g^\alpha = 1/\sqrt{-g}\ .\partial_\alpha(\sqrt{-g}\ .g^\alpha)$

$\nabla_\alpha g^\alpha = 1.\partial_\alpha(1.g^\alpha)$ →suma en α. Solo el término α=U aporta algo no nulo

$\nabla_\alpha g^\alpha = \partial_U(g^U) = 0$ porque g^U=cte

Tenemos una divergencia nula y una densidad de masa nula, no hay ningún conflicto.

9.5.3 Métrica de Schwarzschild:

$\mathcal{L} = -m_o.c^2\ \sqrt{\alpha(r)\dot{T}^2 - \beta(r).\dot{r}^2/c^2 - r^2.[\dot{\theta}^2+\text{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2]/c^2}$

El determinante métrico es $g = g_{oo}.g_{rr}.g_{\theta\theta}.g_{\varphi\varphi}= -\alpha(r)\beta(r).r^4.\text{sen}^2\theta$

La condición $\beta(r)=1/\alpha(r)$, que se visualizó en forma artesanal en 7.2.3, es importante para simplificar la expresión del determinante 'g'. Solo en estas condiciones es aplicable el laplaciano de las coordenadas esféricas $1/r^2\ \partial_r\ (r^2.\partial_r\ \Phi_g) = 0$ en el vacío.

Ejercicio: Repetir los argumentos vistos para Rindler y demostrar que $\alpha(r)=1-r_S/r$ y $\beta(r)=1/(1-r_S/r)$ son una solución aceptable.

9.5.4 Métrica de Gullstrand-Painlevé:

En la sección 7.2.4 deducíamos estas fórmulas métricas para los alrededores de un astro esférico:

en coordenadas Gullstrand-Painlevé: $(dS)^2 = -(c.dT)^2 + [dr + v(r).dT]^2 + r^2.d\Omega^2$

en forma diagonal: $(dS)^2 = -(1 - v^2/c^2).(c.dt)^2 + dr^2/(1 - v^2/c^2) + r^2.d\Omega^2$

Advertíamos que la identificación de la velocidad de escape $v^2/c^2=r_S/r$ era insegura porque estaba basada en argumentos de Física Clásica (6.7.3), y porque transportaba un resultado obtenido por derivación temporal d/dt hacia otro escenario con otra coordenada temporal T≠t.
Todavía quedaba abierta la puerta a otras alternativas como por ejemplo $v^2/c^2=r_S/(r+r_S)$.
Ejercicio: Demostrar que esta elección alternativa de v(r) conduce a una propuesta métrica diagonal $(dS)^2 = -(c.dt)^2/(1+r_S/r) + (1+r_S/r).dr^2 + r^2.d\Omega^2$

Esta hipotética métrica modelaría una gravedad indistinguible de la de Newton en el límite de los campos débiles $r \gg r_S$ y acertaría al predecir un doble ángulo de deflexión de los rayos de luz. Tampoco tendría problemas de existencia de materia detrás del horizonte de sucesos (porque no habría tal horizonte).
Para poder excluir métricas alternativas como la recién mencionada, precisamos una ecuación diferencial que relacione los componentes métricos con el contenido de materia.

Convertimos a Lagrangeano la métrica 7.2.4 escrita en coordenadas Gullstrand-Painlevé:

$$\mathcal{L} = -m_o.c^2\sqrt{\dot{T}^2 - [r^\cdot + v(r).T^\cdot]^2/c^2 - r^2.[\theta^{\cdot 2} + sen^2\theta.\varphi^{\cdot 2}]/c^2}$$

La coordenada temporal T está calibrada para coincidir con el tiempo propio en un experimento de caída libre radial partiendo desde el infinito. Aplicamos entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange en estas condiciones:

$r^\cdot = -v(r).\ T^\cdot$ $\quad T^\cdot = 1$ $\quad \theta^\cdot = 0$ $\quad \varphi^\cdot = 0$

$r^\cdot = -v(r)$ →derivamos respecto a τ y obtenemos:
$r^{\cdot\cdot} = -v'(r).\ r^\cdot$ →sustituimos $r^\cdot = -v(r)$
$r^{\cdot\cdot} = v'(r).\ v(r) = g^r$

g^r = componente radial contravariante del campo gravitatorio $\vec{g}$

Calculamos la divergencia a partir de la fórmula genérica de 9.2.1:

$$\nabla_\alpha g^\alpha = 1/\sqrt{-g}\ .\partial_\alpha\ (\sqrt{-g}\ .g^\alpha)$$

Debe cumplirse $\nabla_\alpha g^\alpha = 0$ en el vacío exterior al astro masivo, donde hay ausencia de materia.

Ejercicio: Demostrar que el determinante de la métrica es $g = -r^4.sen^2\theta$
Sustituimos $\sqrt{-g} = r^2.sen\theta$ en la ecuación del Laplaciano:

$\nabla_\alpha g^\alpha = 0$
$1/\sqrt{-g}\ .\partial_\alpha\ (\sqrt{-g}\ .g^\alpha) = 0$
$1/(r^2 sen\theta).\partial_\alpha\ (r^2 sen\theta.g^\alpha) = 0$

Aquí hay una suma implícita de 4 términos para α=cT, r, θ y φ.
La simetría esférica indica que solo debemos atender el término radial α=r porque es la única coordenada que produce variaciones en las funciones involucradas.

$1/(r^2 sen\theta).\partial_r\ (r^2 sen\theta.g^r) = 0$
$1/r^2.\partial_r\ (r^2.g^r) = 0$
$\partial_r\ (r^2.g^r) = 0$
$r^2.g^r = -K$ cte →$g^r = -K/r^2$

Combinamos con el resultado recién obtenido por la ecuación geodésica en $r^{\cdot\cdot}$:

$g^r = v'(r).\ v(r) = -K/r^2$
$v(r).dv/dr = -K/r^2$
$v.dv = -K.dr/r^2$ →son diferenciales exactos, sencillos de integrar
$v^2/2 = K/r$
$v^2 = 2K/r$

Por compatibilidad con la Física de Newton en el límite de los campos débiles $r\to\infty$, esta constante K debe ajustarse como K=M.G.
Sustituimos y nos queda:
$v^2(r) = 2MG/r$
$v^2(r) = c^2.2MG/(rc^2)$
$v^2(r) = c^2/r.2MG/c^2$
$v^2(r) = c^2/r.r_S$
$v(r) = c.\sqrt{r_S/r}$
Nos vuelve a aparecer la misma velocidad de escape presentada en 6.7.3 a partir de la Física Clásica.
En 7.2.4 sospechábamos que podía formar parte de la métrica de Gullstrand-Painlevé, aunque advertíamos que era riesgoso intentar transportarla de un escenario al otro porque las derivadas temporales se tomaban respecto a coordenadas diferentes, en un caso 't' y en otro caso 'T'.
→Aquí obtenemos una función v(r) como solución de una ecuación diferencial, parece ser un resultado más robusto. Especialmente si tenemos en cuenta que formulamos la ecuación diferencial en base a derivadas covariantes.

De cualquier manera, advertimos que todavía no es una demostración rigurosa. El campo gravitatorio real tiene carácter tensorial, no existe ningún cuadrivector bien-variante $\vec{g}$ que lo describa →por lo tanto no es confiable un razonamiento basado en sus componentes g^α.
Esto puede verse a través de la ecuación geodésica que parte del reposo, $g^\alpha + \Gamma^\alpha_{00}\ U^0.U^0 = 0$.
Hay 3 factores que atentan contra el buen comportamiento del g^α:
- El factor principal es $\Gamma^\alpha_{00,}$ una columna dentro de la matriz de Christoffel $[C_0]$; es un resultado conocido que las filas o columnas de los tensores no se transforman igual que los vectores.
- Y en este caso el Christoffel ni siquiera es un tensor genuino sino un pseudo-tensor.
- Finalmente, está la dependencia del producto $U^0.U^0$.
Si obtenemos resultados coherentes probablemente sea porque tuvimos suerte de que las imperfecciones se compensan unas a otras.

En el caso de las coordenadas de Gullstrand-Painlevé, el resultado que acabamos de encontrar corresponde al escenario en que comenzamos la caída libre desde el infinito con $\dot{r}=0$ en $r=\infty$, y llegamos al punto de estudio 'r' con $\dot{r}\neq 0$. Para mayor seguridad sería conveniente explorar otros escenarios.
Ejercicio: Demostrar que la igualdad $\ddot{r}=v'(r).v(r)$ también se cumple cuando iniciamos la caída libre en reposo $\dot{r}=0$ desde un $r=r_o$ finito. Algunas guías y pasos intermedios para la demostración:
- Momento radial $P_r=m_o.(\dot{r} + v(r).\dot{T})$
- "Fuerza" $\partial_r\mathcal{L} = m_o.(\dot{r} + v(r).\dot{T}).v'(r).\dot{T}$
- La normalización del Lagrangeano $\sqrt{\ } = 1$ significa $\dot{T}^2_{(\tau=0)} = 1/[1-v^2(r_o)/c^2]$
- $\ddot{T}_{(\tau=0)} = v(r)/c^2.\ \dot{T}^2_{(\tau=0)}.\ddot{r}_{(\tau=0)}$
- Otra vía de demostración es pasar a las coordenadas Schwarzschild y calcular allí el $\ddot{r}$ partiendo del reposo. Debería dar lo mismo porque el 'r' de Schwarzschild y el 'r' de Gullstrand Painleve son el mismo, y el τ también porque es el tiempo propio de la partícula analizada.

9.6 Principio de covarianza.

La derivada covariante nos acerca a la forma relativista que deberán tener las ecuaciones de campo que gobiernan la generación de perturbaciones métricas por parte de las masas y que sustituyen a las fórmulas gravitatorias de Newton. El próximo paso que deberemos abordar es llevar todo a una **forma tensorial**:

- capítulo 10: veremos un tensor de materia-energía del cual forma parte la densidad de masa ρ_m.
- capítulo 11: involucraremos a los tensores de curvatura de Riemann/Ricci en las ecuaciones de generación de gravedad.

El llamado Principio de Covarianza afirma que las leyes físicas deben expresarse en forma tensorial. *(Advertencia: el término covariante se está usando como sinónimo de lo que aquí llamamos 'bienvariante'*). La forma tensorial se conserva frente a un cambio de coordenadas *genérico*; esto unifica dentro del mismo marco todas las perturbaciones métricas, ya sea causadas por masas o simplemente por utilizar coordenadas curvilíneas. Igualdad bienvariante equivale a decir *igualdad tensorial*. Si el tensor a la izquierda de la ecuación es igual al tensor del lado derecho, entonces el tensor diferencia es nulo. Y un tensor nulo en un sistema de coordenadas va a ser nulo luego de cualquier cambio de variable porque las leyes de transformación son multilineales.

Hay una relación entre este principio, el de Equivalencia y el de Mínimo Acople enunciado en 9.4:

- En una región donde hay campo gravitatorio podemos *dejarnos ir* en caída libre para eliminar localmente los efectos de la gravedad.
- En el referencial de caída libre tenemos una métrica aproximadamente igual a la de Minkowski, con primeras derivadas nulas ya que se anulan los símbolos de Christoffel. La derivada covariante se puede aproximar por la derivada coordenada; eso nos permite formular ecuaciones tensoriales inspiradas en los resultados de la Relatividad Especial, y con dificultad reducida.
- Luego aplicamos las leyes de transformación tensorial para volver al referencial original, donde se siente la gravedad, y lo que nos queda son ecuaciones generales. La métrica ya no es una leve perturbación de la de Minkowski y la derivada covariante debe usarse en su completitud porque ya no puede ser aproximada por la derivada coordenada.

Aplicación del Principio de Covarianza:

Los resultados 9.2.2→$R_{00} \approx -\frac{1}{2}.[]^2 h_{00}$ y 9.2.4→$R_{00} \approx 4\pi G\rho/c^2$ nos invitaban a enunciar una posible generalización relativista al pasar de campos débiles a campos altos: las zonas vacías de materia, que en el límite clásico se asocian a métricas g_{oo} con potenciales Φ_g de d'Alembertiano nulo, se generalizan a métricas con un valor nulo en el componente R_{oo} de Ricci.

Ahora podemos ir un paso más lejos en la generalización: las ecuaciones con sentido relativista tienen que ser tensoriales. No debemos buscarle sentido a la anulación de un componente particular del tensor de Ricci, sino más bien al tensor de Ricci completo: $R_{\alpha\beta}=0\ \forall\alpha\ \forall\beta$ es nuestra "*candidata*" a ecuación tensorial que describa a la métrica en el vacío; vamos en camino de demostrar este resultado. A partir del capítulo 10, una vez que tengamos un tensor de materia (llamémoslo $M_{\alpha\beta}$), estaremos en condiciones de buscar ecuaciones de campo con una constante de proporcionalidad, de la forma $R_{\alpha\beta}=K.M_{\alpha\beta}$.

9.6.1 Límite del campo débil:

Para reforzar la asociación entre el tensor de Ricci y las derivadas segundas clásicas (laplaciano) debemos obtener una expresión aproximada para todas sus componentes y no solamente para R_{oo}. Vamos a operar en un entorno que en inglés se llama "*Weak Field Limit*" y se abrevia W.F.L. Estos escenarios son alcanzables si nos alejamos lo suficiente de las masas que causan atracción más significativa, o si nos dejamos llevar por la gravedad en caída libre. Puede quedar la impresión falsa de que ese escenario solo es viable para experimentos mentales pero impráctico para experimentos reales, si pensamos "¿qué tan lejos debemos irnos?" o si creemos que la caída libre dura solamente hasta que nos estrellamos contra la superficie de la Tierra. Pero no es necesario tomar tales riesgos: orbitar fuera de la estratósfera a cientos o a miles de kilómetros de altitud caería perfectamente dentro de esta categoría de "referencial inercial".

Desde el punto de vista matemático, el camino a recorrer será Christoffel→Riemann→Ricci.

9.6.2 Símbolos de Christoffel:

La definición formal según 8.3 es:

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} = \tfrac{1}{2}.g^{\lambda\sigma}.(\partial_\alpha g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\mu})$$

Dentro de la hipótesis de campos débiles, los coeficientes de la métrica se pueden escribir como el coeficiente base de Minkowski + una perturbación de módulo pequeño. $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ con $|h_{\alpha\beta}|\ll 1$.
Las operaciones de derivación solo afectan a la perturbación; la parte de Minkowski se mantiene fija en diag(–1,+1,+1,+1).
Por otro lado, es usual en este régimen de aproximaciones utilizar los tensores de Minkowski para subir o bajar índices. Como los símbolos de Christoffel de 2da especie surgen de subir el índice a los de 1ra especie, vale también para ellos esta regla. Lo que nos lleva a la expresión modificada:

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} = \tfrac{1}{2}.g^{\lambda\sigma}.(\partial_\alpha g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\mu})$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \approx \tfrac{1}{2}.\eta^{\lambda\sigma}.(\partial_\alpha h_{\sigma\mu} + \partial_\mu h_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma h_{\alpha\mu})$$

El tensor de Minkowski, al ser constante, se puede meter dentro o sacar fuera del operador de derivación. Cuando opera sobre los coeficientes de la perturbación ejecuta una elevación de índices ($\eta^{\lambda\sigma}h_{\sigma\alpha}= h^{\lambda}{}_{\alpha}$).

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \approx \tfrac{1}{2}.(\partial_\alpha h^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_\mu h^{\lambda}{}_{\alpha} - \partial^{\lambda} h_{\alpha\mu}).$$

9.6.3 Tensor de Riemann:

Sus componentes fueron definidos en 9.1 como: $R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}.\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma}.\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}$
En la aproximación de campos débiles, y para coordenadas cartesianas, es usual que la derivada covariante se parezca bastante a la derivada coordenada. En la fórmula $\nabla_\alpha[\vec{A}]= \partial_\alpha[\vec{A}]+[C_\alpha].[\vec{A}]$, la parte dominante es ∂_α y la matriz de Christoffel $[C_\alpha]$ constituye un término perturbativo de primer orden. Con estas hipótesis, los productos de matrices de Christoffel representan perturbaciones de segundo orden y se pueden eliminar del análisis, lo que resulta en una fórmula aproximada:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}.\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma}.\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}$$

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} + 0$$

Sustituimos aquí las fórmulas 9.6.2, cuidando de respetar el orden y el rol de los índices.

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} \approx \tfrac{1}{2}.(\partial_\beta h^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - \partial^{\lambda} h_{\beta\mu}).$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \approx \tfrac{1}{2}.(\partial_\alpha h^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_\mu h^{\lambda}{}_{\alpha} - \partial^{\lambda} h_{\alpha\mu}).$$

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}$$

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\alpha(\partial_\beta h^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - \partial^{\lambda} h_{\beta\mu}) - \partial_\beta(\partial_\alpha h^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_\mu h^{\lambda}{}_{\alpha} - \partial^{\lambda} h_{\alpha\mu}\ ]$$

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\alpha\partial_\beta h^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_\alpha\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - \partial_\alpha\partial^{\lambda} h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\alpha h^{\lambda}{}_{\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\alpha} + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\alpha\mu}\ ]$$

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\alpha\partial_\beta h^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_\alpha\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - \partial_\alpha\partial^{\lambda} h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\alpha h^{\lambda}{}_{\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\alpha} + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\alpha\mu}\ ] \quad \rightarrow \text{cancelamos + -}$$

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\alpha\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - \partial_\alpha\partial^{\lambda} h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\alpha} + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\alpha\mu}\ ]$$

9.6.4 Tensor de Ricci:

El tensor de Ricci se obtiene contrayendo dos índices del tensor de Riemann λ=α, de acuerdo con la definición formal es $R_{\mu\beta} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\beta}$.

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\alpha\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - \partial_\alpha\partial^{\lambda} h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\alpha} + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\alpha\mu}\ ] \quad \rightarrow \text{contracción } \alpha=\lambda$$

$$R_{\mu\beta} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - \partial_\lambda\partial^{\lambda} h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\lambda} + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\lambda\mu}\ ]$$

$$R_{\mu\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - \partial_\lambda\partial^{\lambda} h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\lambda} + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\lambda\mu}\ ] \quad \rightarrow \text{identificamos } \partial_\lambda\partial^{\lambda}=[]^2=\text{d'Alembertiano}$$

$$R_{\mu\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - []^2 h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\lambda} + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\lambda\mu}\ ]$$

$$R_{\mu\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - []^2 h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\lambda} + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\lambda\mu}\ ] \quad \rightarrow h^{\lambda}{}_{\lambda} = h = \text{traza de la perturbación}$$

$$R_{\mu\beta} \approx \tfrac{1}{2}.[\partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} - []^2 h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h + \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\lambda\mu}\ ]$$

$$R_{\mu\beta} \approx -\tfrac{1}{2}.[\partial_\beta\partial_\mu h - \partial_\beta\partial^{\lambda} h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\beta} + []^2 h_{\beta\mu}\ ]$$

Tenemos 4 contribuciones para el elemento μβ del tensor de Ricci:

- doble gradiente de la traza 'h', es decir, derivada segunda respecto de las coordenadas μ, β
- derivada-β (gradiente) de la divergencia de la columna-μ
- derivada-μ (gradiente) de la divergencia de la columna-β
- d'Alembertiano del componente $h_{\mu\beta}$

9.6.5 Condición de calibre:

La expresión del tensor de Ricci se simplifica considerablemente si imponemos una condición adicional a las componentes de la perturbación.
La razón de porqué es posible imponer esta condición va más allá del alcance de este capítulo. Simplemente mencionaremos la similitud con el Electromagnetismo: los coeficientes de la perturbación son interpretables como potenciales escalares Φ_g, Ψ_g y vectoriales $c.\vec{A_g}$, y admiten una condición adicional entre sus derivadas espaciales y temporales sin que por ello dejen de describir al mismo sistema físico.
Probaremos 2 condiciones de calibre.

Divergencia nula:

$$\partial_\lambda h^\lambda{}_\beta = 0$$

No le ponemos nombre a esta condición, aunque podríamos referirnos informalmente a ella como "calibre de Coulomb" porque está inspirada en la condición de Coulomb del Electromagnetismo $\nabla \cdot \vec{A}=0$.

$$R_{\mu\beta} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\beta\partial_\mu h - \partial_\beta\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda{}_\beta + \Box^2 h_{\mu\beta}\,]$$

¿Cómo se simplifica el tensor de Ricci con este calibre?

- El término coloreado en celeste es nulo, se ve en forma inmediata si intercambiamos el orden de las derivadas.
- En el término coloreado en verde $\partial_\beta\partial^\lambda h_{\lambda\mu}$ tenemos λ sumado: bajamos el índice λ al operador de derivadas y se lo subimos a la perturbación: $\partial_\beta\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu$. Así queda en evidencia que también es nulo.
  Ejercicio: Operar con los tensores de Minkowski para demostrar lo anterior.

El tensor de Ricci queda entonces algo *aliviado* con 2 sumandos en vez de 4:

$$R_{\mu\beta} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\beta\partial_\mu h - 0 - 0 + \Box^2 h_{\mu\beta}\,]$$
$$R_{\mu\beta} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\beta\partial_\mu h + \Box^2 h_{\mu\beta}\,]$$

Subimos el índice $_\mu \rightarrow {}^\sigma$:

$$R^\sigma{}_\beta \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial^\sigma\partial_\beta h + \Box^2 h^\sigma{}_\beta\,]$$

Contraemos β=σ y sumamos en σ:

$$R^\sigma{}_\sigma \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial^\sigma\partial_\sigma h + \Box^2 h^\sigma{}_\sigma\,] \qquad \rightarrow \text{sustituimos}$$
$$R \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\Box^2 h + \Box^2 h\,]$$
$$R = -\Box^2 h \qquad \rightarrow \text{queda una expresión simplificada para el escalar Ricci}$$

Divergencia no nula:

A este otro calibre lo llamamos gauge de Lorenz inspirado en su análogo del Electromagnetismo $\nabla \cdot \vec{A}\neq 0$.

$$\partial_\lambda h^\lambda{}_\alpha = \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha h$$

$$R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\alpha\partial_\mu h - \partial_\alpha\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda{}_\alpha + \Box^2 h_{\alpha\mu}\,] \qquad \rightarrow \text{reordenamos índices celestes}$$
$$R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\alpha\partial_\mu h - \partial_\alpha\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \partial_\mu\partial_\lambda h^\lambda{}_\alpha + \Box^2 h_{\alpha\mu}\,] \qquad \rightarrow \text{subimos y bajamos el índice verde } \lambda$$
$$R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\alpha\partial_\mu h - \partial_\alpha\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu - \partial_\mu\partial_\lambda h^\lambda{}_\alpha + \Box^2 h_{\alpha\mu}\,] \qquad \rightarrow \text{aplicamos calibre Lorenz a cada color}$$
$$R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\alpha\partial_\mu h - \partial_\alpha\partial_\mu (h/2) - \partial_\mu\partial_\alpha (h/2) + \Box^2 h_{\alpha\mu}\,] \qquad \rightarrow \text{reconocemos verde=celeste}$$
$$R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\alpha\partial_\mu h - 2.\partial_\alpha\partial_\mu (h/2) + \Box^2 h_{\alpha\mu}\,]$$
$$R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\partial_\alpha\partial_\mu h - \partial_\alpha\partial_\mu (h) + \Box^2 h_{\alpha\mu}\,]$$
$$R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\,[\Box^2 h_{\alpha\mu}$$

→Esta condición de calibre es más ambiciosa: elimina 3 de los 4 términos y resulta una generalización de la sección 9.2.2, donde vimos esta misma relación pero solamente entre los componentes temporales R_{oo} y h_{oo}.

$$R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\ []^2 h_{\alpha\mu}$$

Encontramos entonces que el tensor de Ricci es una generalización del operador d'Alembertiano, y en el límite de los campos débiles se reduce a él (salvo un signo y un factor de escala) cuando se utiliza la condición de calibre de Lorenz.

La misma relación aproximada vale tomando trazas a cada miembro de la ecuación anterior:

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.\ []^2 h$$

9.6.6 Posible métrica de vacío:

Como ejemplo de aplicación de estas fórmulas, analizamos el espacio vacío exterior a una distribución de masa estática y esféricamente simétrica (a distancia prudencial para que valga la hipótesis de campo débil).

En ausencia de materia, la solución de vacío que estamos vislumbrando es $R_{\alpha\mu}=0\ \forall\alpha\forall\mu$. Nos animamos a formular esta sospecha, aunque todavía no tengamos la forma final de las ecuaciones de campo genéricas ya que nos falta estudiar el tensor de materia del capítulo 10.

En el primer calibre propuesto $\partial_\alpha h^\alpha{}_\beta=0$, debemos resolver para cada pareja de índices $\alpha\ \mu$:

$R_{\alpha\mu}=0 \rightarrow \quad []^2 h_{\alpha\mu} + \partial_\alpha\partial_\mu h=0$

Las ecuaciones están todas acopladas por causa de la traza 'h', se requiere un buen esfuerzo matemático para desacoplarlas y posponemos para otro capítulo los cálculos.

Por el momento utilizamos el segundo calibre de Lorenz que simplifica las operaciones en forma apreciable.

La condición de Ricci nulo, con $R_{\alpha\mu} \approx -\tfrac{1}{2}.[]^2 h_{\alpha\mu}$, significa que todos los componentes h_{00} y h_{ii} son armónicos ~C/r acordes con la geometría esférica; nos falta información sobre los coeficientes C.

En este calibre Lorenz (*no en otros calibres*) podemos encontrar soluciones de métrica diagonal isotrópica.

La condición de calibre de Lorenz, para la columna-x, afirma:

$\partial_\lambda h^\lambda{}_x = \tfrac{1}{2}.\partial_x h$ →expandimos la suma desde λ=0 hasta λ=3

$\partial_0 h^0{}_x + \partial_x h^x{}_x + \partial_y h^y{}_x + \partial_z h^z{}_x = \tfrac{1}{2}.\partial_x h$ →asumimos nulos los coeficientes fuera de la diagonal

$\partial_0 0 + \partial_x h_{ii} + \partial_y 0 + \partial_z 0 = \tfrac{1}{2}.\partial_x h$

$\partial_x h_{xx} = \tfrac{1}{2}.\partial_x h \quad \rightarrow h_{xx}=h/2$

Lo mismo se obtiene para la columna-z y para la columna-y: $h_{yy}=h/2$, $h_{zz}=h/2$

Tenemos isotropía: todos los coeficientes espaciales valen lo mismo $h_{xx}=h_{yy}=h_{zz}=h_{ii}=h/2$

¿Qué es la traza de la perturbación? Es la contracción del tensor con su métrica, $h=h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}$.

En esta suma de 16 términos solo prevalecen las combinaciones $\alpha=\beta \rightarrow h=h_{oo}\eta^{oo}+h_{xx}\eta^{xx}+h_{yy}\eta^{yy}+h_{zz}\eta^{zz}$

La traza vale entonces $h=-h_{oo}+h_{xx}+h_{yy}+h_{zz} \quad \rightarrow h=-h_{oo}+3h_{ii}$

Combinamos las 2 relaciones anteriores $h=-h_{oo}+3hii=2h_{ii}$

Nos queda: $h_{ii}=h_{oo}$

Si $h_{oo} \approx r_S/r$ por compatibilidad con el límite clásico, lo mismo vale para $h_{xx}=h_{yy}=h_{zz}$.

Reencontramos la métrica $(dS)^2 \approx -(c.dt)^2.(1-r_S/r) + (1+r_S/r).(dx^2+dy^2+dz^2)$, que en la sección 7.2 habíamos conjeturado todavía sin muchas herramientas para justificar cómo era generada.

El Electromagnetismo enseña que los armónicos de laplaciano nulo en cierta región se corresponden con fuentes ubicadas en otra región. En el próximo capítulo deberemos investigar quiénes son las fuentes de estas perturbaciones espaciales y cómo operan las relaciones causa-efecto.

Calibre armónico o De Donder:

Cerramos este capítulo y esta Segunda Parte analizando una propiedad especial que cumple el calibre que llamamos Lorenz. Veremos que convierte a las coordenadas (x,y,z,t) en un caso especial de coordenadas armónicas. Que es algo deseable para muchas aplicaciones debido a la "suavidad" con que varían.

Coordenadas armónicas significa que el laplaciano de todas las coordenadas es nulo.
El ejemplo más simple de coordenadas armónicas son las cartesianas: $\nabla^2(x)=0\ \nabla^2(y)=0\ \nabla^2(z)=0$.
Las cilíndricas y esféricas no cumplen la condición de ser armónicas. Es fácil verlo si analizamos la coordenada radial. Laplaciano de 'r' es divergencia del gradiente de 'r', el cual resulta ser un campo vectorial que emana radialmente desde el origen y tiene allí una divergencia infinita.

La condición de calibre general, para obtener coordenadas armónicas, se llama "De Donder Gauge" en honor al científico belga que realizó la formulación por primera vez.
Analizaremos el caso particular correspondiente a los ambientes de gravedad débil o W.F.L.
Podríamos pensar que el cálculo tiene poco sentido en este régimen W.F.L, donde las coordenadas cuasi-cartesianas (con la métrica ínfimamente deformada respecto a la de Minkowski) siempre serán armónicas.
Pero comprobaremos que todas presentan en general un pequeño laplaciano del orden de la perturbación 'h'.
Solo una condición de calibre particular permite reducir el laplaciano a un infinitésimo de orden h^2.

Elegimos alguna coordenada espacial, por ejemplo 'x'. ¿Qué es $\nabla^2(x)=\nabla\cdot\nabla x$?
El gradiente de la coordenada 'x' es el vector dual $\tilde{E}^x$ (capítulo 8.1.3).
Este dual es el resultado de subirle el índice a su vector base correspondiente $\tilde{E}^x = g^{x\alpha}\ \vec{E_\alpha}$, o sea que es un vector de componentes $g^{x\alpha}$. (o $g^{\alpha x}$ por simetría)
La divergencia es la covariante, y la condición de laplaciano nulo es:

$\nabla_\alpha (g^{\alpha x}) = 0$ →fórmula 9.2.1 del determinante
$1/\sqrt{-g}\ .\partial_\alpha (\sqrt{-g}\ .g^{\alpha x}) = 0$

Atención: estamos tratando como un vector a la columna-x del tensor métrico dual, por lo tanto el resultado *no es la divergencia del tensor*. A lo que llegaremos es a una condición de calibre.

En régimen W.F.L, el tensor métrico es de "diagonal dominante" y su determinante es esencialmente el producto de los elementos de su diagonal.

$g\approx (-1+h_{oo})(1+h_{xx})\ (1+h_{yy})\ (1+h_{zz})$
$-g\approx (1-h_{oo})(1+h_{xx})\ (1+h_{yy})\ (1+h_{zz})$
$-g\approx 1-h_{oo}+h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}$ →reconocemos la traza 'h'
$-g\approx 1+h$
$\sqrt{-g}\approx 1+h/2$

Por otro lado, $g^{\alpha x}=\eta^{\alpha x}-h^{\alpha x}$. *Atención al signo (–) de la perturbación!*
Sustituimos:

$\partial_\alpha (\sqrt{-g}\ .g^{\alpha x}) =0$
$\partial_\alpha ((1+h/2).\ (\eta^{\alpha x}-h^{\alpha x}) \approx 0$ →derivada del producto
$\partial_\alpha(1+h/2).(\eta^{\alpha x}-h^{\alpha x}) + (1+h/2).\ \partial_\alpha(\eta^{\alpha x}-h^{\alpha x}) \approx 0$
$\partial_\alpha(h/2).\eta^{\alpha x}-\partial_\alpha(h/2)h^{\alpha x} -(1+h/2).\ \partial_\alpha(h^{\alpha x}) \approx 0$
$\partial_\alpha(h/2).\eta^{\alpha x}-\partial_\alpha(h/2)h^{\alpha x} -\partial_\alpha(h^{\alpha x}) +h/2.\partial_\alpha(h^{\alpha x})\approx 0$ →descartamos infinitésimos de orden h^2
$\partial_\alpha(h/2).\eta^{\alpha x}\approx\partial_\alpha(h^{\alpha x})$

$\eta^{\alpha x}$ es unitario en α=x y nulo en los demás alfas, como una δ Kronecker. Por otro lado, $h^{\alpha x} = h^\alpha{}_x$.
Nos queda $\partial_x(h/2)\approx\partial_\alpha(h^\alpha{}_x)$.
Repetimos los cálculos para las restantes coordenadas 'y', 'z', 't', y verificamos que la condición de calibre de "divergencia no-nula" de 9.6.5 $\partial_\beta(h/2)\approx\partial_\alpha(h^\alpha{}_\beta)$ es la misma que asegura la propiedad armónica.
Ejercicio: Intentar razonar el signo de la perturbación $g^{\alpha x}\approx\eta^{\alpha x}-h^{\alpha x}$. Comenzar por una métrica diagonal exacta, y continuar con una de diagonal dominante.

Fin de la Segunda Parte.

1. SISTEMAS DE REFERENCIA
2. LEYES FÍSICAS
3. RELATIVIDAD ESPECIAL
4. TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ
5. MECÁNICA RELATIVISTA Y ELECTROMAGNETISMO
6. RELATIVIDAD GENERAL, INTRODUCCIÓN
7. CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO
8. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
9. FÍSICA EN ESPACIOS CURVOS

CONTINUACIÓN→
TERCERA PARTE.

10. **TENSOR DE ENERGÍA-IMPULSO**
11. **ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN**
12. **SOLUCIONES EXACTAS**
13. **TEMAS ADICIONALES**
14. **ÍNDICE DE AUTORES Y DICCIONARIO.**
15. **EJERCICIOS RESUELTOS.**
16. ANEXOS
    - 1.1.1 Cálculo numérico, códigos fuente.
    - 1.1.2 Lecturas de interés.

BIBLIOGRAFÍA.